

# Definiciones: conjuntos, grafos, y árboles

Agustín J. González

ELO 320: Estructura de Datos y  
Algoritmos. 2002

# Conjuntos (sets) y Grafos (graphs)

- Un **Conjunto** es una colección de objetos distintos.
- No hay diferencia con lo ya aprendido en teoría de conjuntos en matemáticas.
  
- Grafos: los hay de dos “sabores” grafos dirigidos y grafos no dirigidos.
- Un **Grafo Dirigido** (o digrafo)  $G$  es un par  $(V,E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito y  $E$  es una relación binaria sobre  $V$ . Es decir,  $E$  es un subconjunto del producto cartesiano  $V \times V$ .
- $V$  es llamado el conjunto de vértices de  $G$ , y cada elemento es llamado vértice.
- $E$  es llamado el conjunto de arcos de  $G$ , y cada elemento es llamado arco.
- En un grafo dirigido es posible tener arcos apuntando al mismo nodo de salida  $(u,v)$ , con  $u=v$ .
  
- Un **Grafo No Dirigido**  $G=(V,E)$  de arcos  $E$  consiste de pares no ordenados. Es decir un arco es un conjunto  $\{u, v\}$ . Se acostumbra anotar  $(u,v)$  en lugar de  $\{u,v\}$ ;  $(u,v)$  y  $(v,u)$  son considerados el mismo arco.
- No hay arcos al mismo nodo en un grafo no dirigido.  $u \neq v$ .

## Otras definiciones en grafos

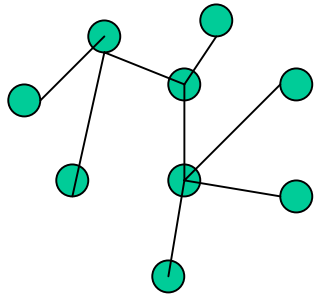
- **Camino de largo  $k$**  desde un vértice  $u$  a otro  $u'$  es la secuencia  $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  de vértices tal que  $u = v_0$ ,  $u' = v_k$ , y  $(v_{i-1}, v_i)$  pertenece a  $E$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ .
- **Camino simple** si todos los vértices son distintos en el camino.
- **Ciclo en grafo dirigido:** es un camino  $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  tiene  $v_0 = v_k$  y el camino contiene al menos un arco.
- **Ciclo en grafo no dirigido:** es un camino de largo tres o más que conecta un vértice con el mismo.
- Un **ciclo es simple** si  $v_1, v_2, \dots, v_k$  son distintos.
- Grafo acíclico es aquel que no tiene ciclos

## Definiciones en grafos (Cont)

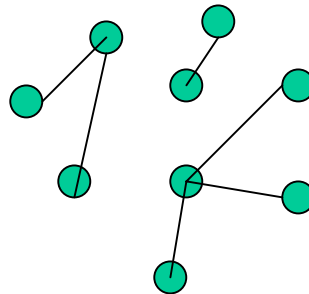
- Un Grafo no dirigido es *conexo* si cada par de vértices están conectados por un camino.
- Las *componentes conexas* de un grafo son las clases de equivalencia bajo la relación “es alcanzable”. En otras palabras, son los conjuntos de vértices alcanzables entre si.
- Un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si cada par de nodos es alcanzable de uno al otro.
- Las *componentes fuertemente conexas* de un grafo dirigido, son los conjuntos de vértices mutuamente alcanzables.
- *Foresta*: grafo no dirigido y acíclico
- *Arbol libre*: grafo no dirigido, acíclico, y conexo.
- “Dag”: grafo acíclico dirigido (**d**irected **a**cyclic **g**raph)

# Árboles

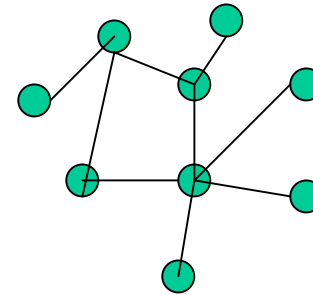
- **Árbol libre:** es un grafo no dirigido acíclico conexo.
- **Foresta:** es menos restrictivo, es un grafo no dirigido acíclico. Es decir da la posibilidad que sea desconexo.



Árbol libre



Foresta



Ni árbol ni foresta, sólo un grafo

- **Árbol con raíz:** es un árbol libre en el cual un vértice se distingue del resto. Este vértice es la raíz.
- **Nodo:** es el término usado para referirse a un vértice de un árbol con raíz.

# Árboles: más conceptos

- **Ancestro:** cualquier nodo en el camino a la raíz de un nodo  $x$  es el ancestro de  $x$ .
- **Descendiente :** si  $y$  es un ancestro de  $x$ ,  $x$  es un descendiente de  $y$ .
- Si  $x$  es un descendiente de  $y$  con  $x \neq y$ ,  $x$  es un **descendiente propio** de  $y$
- Análogamente podemos definir un **ancestro propio**.
- Si  $(x,y)$  es el último arco en el camino desde la raíz hacia  $y$ , entonces  $x$  es el **padre** de  $y$  e  $y$  es el **hijo** de  $x$ . La raíz es el único nodo sin padre.
- Si dos nodos tienen el mismo padre son **hermanos**
- Un nodo sin hijos es un **nodo externo** u **hoja**.
- Los nodos no hojas son **nodos internos**.
- El largo del camino desde la raíz a un nodo  $x$  es la **profundidad** de  $x$ .
- La profundidad más grande de cualquier nodo del árbol  $T$  es la **altura** de  $T$ .
- **Árbol binario:** e Un árbol binario  $T$  es una estructura definida sobre un conjunto finito de nodos que cumple:
  - no contiene nodos (árbol vacío o nulo).
  - Está compuesta de tres conjuntos disjuntos: un nodo raíz, un árbol binario llamado sub-árbol izquierdo, y un árbol binario llamado sub-árbol derecho.
- **Hijo izquierdo / hijo derecho:** la raíz del sub-árbol izquierdo / derecho
- ¿Cuántos nodos posee un árbol binario de altura  $h$ ?

# Altura de un árbol

- La altura de un árbol es el largo del mayor camino de la raíz a una hoja.
- Dado un camino  $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  el largo de este camino es  $k$ .
- Por lo cual el largo de un camino es igual al número de arcos del camino.

