# Conceptos de Señales

*ELO 313 –Procesamiento Digital de Señales con Aplicaciones*
*Primer semestre - 2012*

EX UMBRA IN SOLEM

Matías Zañartu, Ph.D.
Departamento de Electrónica
Universidad Técnica Federico Santa María

# Conceptos de Señales

Transformaciones Lineales Básicas en Tiempo Continuo

# Transformaciones en Tiempo Continuo



- **CTFT: Transformada de Fourier en Tiempo Continuo**

**Definición CTFT**

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{j2\pi ft}df$$

# Transformaciones en Tiempo Continuo



- **CTFT: Transformada de Fourier en Tiempo Continuo**

**Propiedades de la CTFT**

| | |
|---|---|
| $af(t) + bg(t)$ | $aF(f) + bG(f)$ |
| $f^*(t)$ | $F^*(-f)$ |
| $f(at)$ | $\frac{1}{\|a\|}F(f/a)$ |
| $f(t - t_0)$ | $\exp\{-j2\pi f t_0\} F(f)$ |
| $\exp\{j2\pi f_0 t\} f(t)$ | $F(f - f_0)$ |
| $f(t) * g(t)$ | $F(f)\, G(f)$ |
| $f(t)g(t)$ | $F(f) * G(f)$ |
| $F(t)$ | $f(-f)$ |

- ¿No se acuerda de NADA? Urgente leer Capítulos 1-4 de "Signals and systems" de Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, Syed Hamid Nawab, 2nd edition, 1997

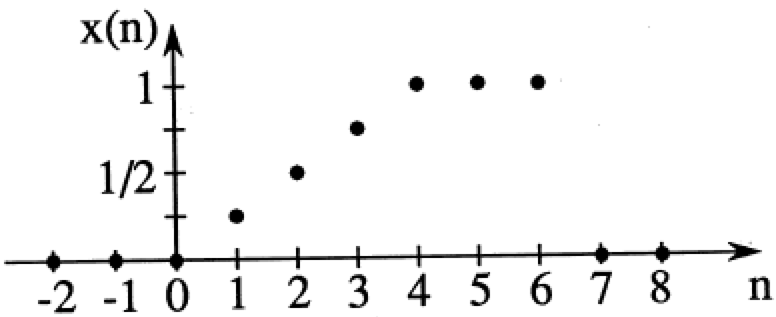
# Conceptos de Señales

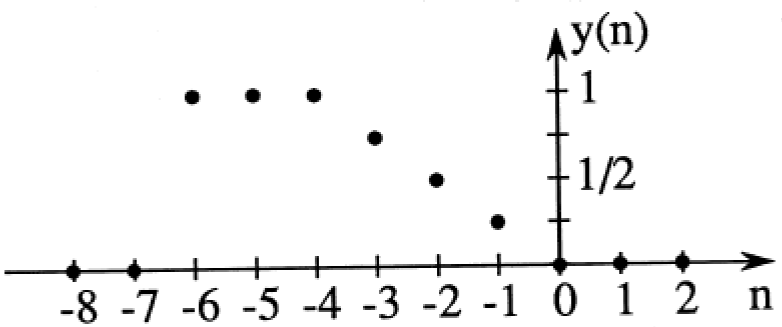
Transformaciones Lineales en Tiempo Discreto

# Transformaciones Lineales



- **Reflexión**
  - $y(n) = x(-n)$
  - Operación espejo con respecto al origen

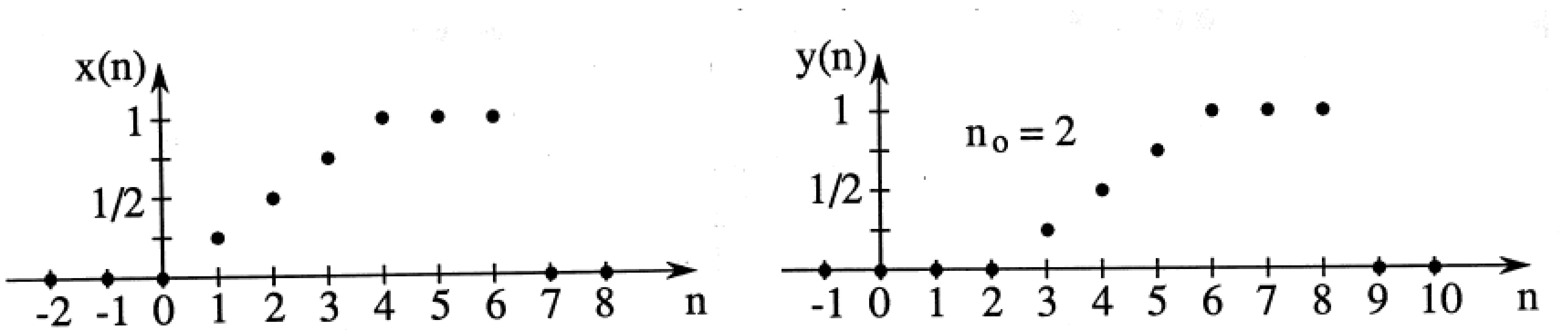


# Transformaciones Lineales



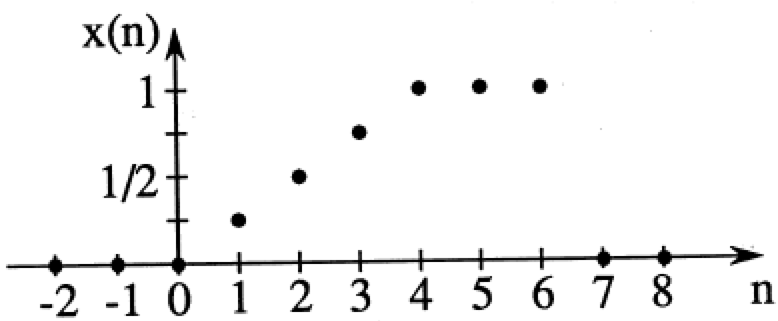
- **Corrimiento**
  - $y(n) = x(n - n_0)$
  - El corrimiento $n_0$ debe ser un entero
  - Corrimiento hacia la derecha (restar un $n_0$ positivo) se asocia a un retardo
  - ¿Cómo se visualiza un retardo en un osciloscopio?

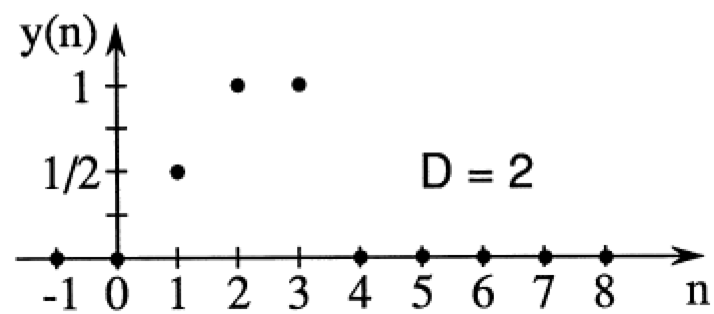


# Transformaciones Lineales



- **Escalamiento temporal**
  - **Downsample:** $y(n) = x(Dn)$
  - Reduce la cantidad de muestras. ¿Problemas asociados a esto?
  - ¿Qué sucede con el periodo de la señal, si fuese periódica?
  - ¿Qué problemas puede traer esta operación?
  - Notación: 

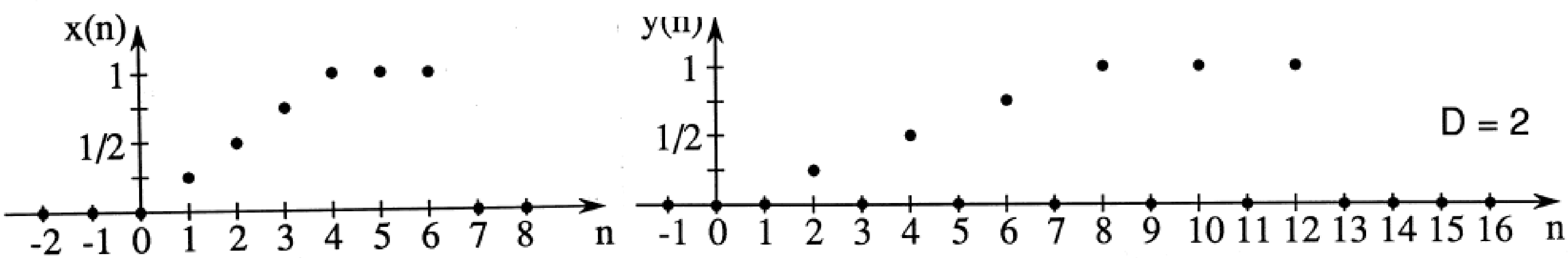




  - **Decimation**: Downsampling + Filtro pasabajo (antialiasing)

# Transformaciones Lineales



- **Escalamiento temporal**
  - **Upsample:** $y(n) = \begin{cases} x(n/D) & \text{, si } n/D \text{ es un entero} \\ 0 & \text{, en caso contrario} \end{cases}$
  - Aumenta la cantidad de muestras
  - ¿Qué sucede con el periodo de la señal, si fuese periódica?
  - Notación:


  - **Interpolación:** Upsampling + Filtrado pasabajo (antialiasing)

# Transformaciones Lineales



- **Preguntas**
  - ¿Qué otro tipo de escalamiento existe?
  - ¿Se cancelan siempre las operaciones de downsampling y upsampling?
  - ¿Bajo qué condiciones NO se cancelarían estas operaciones?
  - Asumiendo que el muestreo se mantiene constante, cuál es su intuición de lo que sucede con las componentes de frecuencia de una señal (ancho de banda) al sufrir operaciones de:
    - Reflexión
    - Corrimiento
    - Downsampling
    - Upsampling

  - Para poder contestar bien esta última pregunta necesitamos estudiar la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

# Conceptos de Señales

Señales Especiales en Tiempo Continuo

# Señales en Tiempo Continuo



- **Señales especiales en tiempo continuo**
  - Sinc es una versión normalizada cuya integral = 1 y con cruces de 0 en enteros (menos en t=0)
  - La definición de la función delta es intuitiva, pero no formal

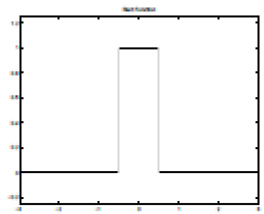
    $\longrightarrow$ Delta de Dirac

    $\longrightarrow$ Otras definiciones (Sinc, Gauss, teoría de medida)

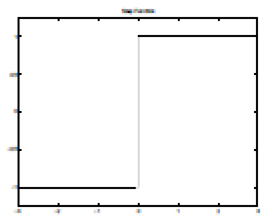
    $\longrightarrow$ Integral = 1

    $\longrightarrow$ No es función

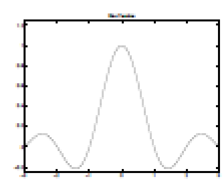
$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \geq 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases}$$



$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mathrm{rect}(t/\epsilon)$$

# Señales en Tiempo Continuo



- **CTFT: Transformada de Fourier en Tiempo Continuo**

| **Pares de CTFT** |
| --- |

$$\delta(t) \overset{CTFT}{\Leftrightarrow} 1$$

$$1 \overset{CTFT}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$\mathrm{rect}(t) \overset{CTFT}{\Leftrightarrow} \mathrm{sinc}(f)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \overset{CTFT}{\Leftrightarrow} \mathrm{rect}(f)$$

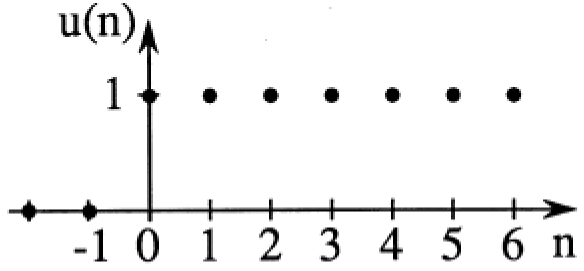
# Conceptos de Señales

Señales Especiales en Tiempo Discreto

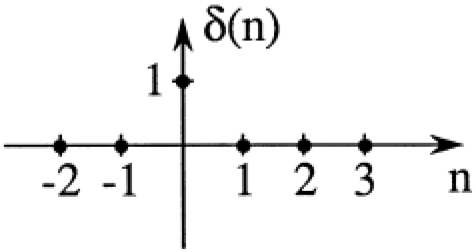
# Señales Especiales en Tiempo Discreto



- **Escalón**
  - $u(n) = \begin{cases} 1\,, \text{si } n \geq 0 \\ 0\,, \text{en caso contrario} \end{cases}$




- **Impulso**
  - $\delta(n) = \begin{cases} 1\,, \text{si } n = 0 \\ 0\,, \text{en caso contrario} \end{cases}$




  - Delta de Kronecker
  - Propiedad de interés: $x(n_0) = x(n)\delta(n - n_0)$
  - ¿Qué relación existe entre las señales escalón e impulso?
  - ¿Qué ventajas tienen estas señales con respecto a sus contrapartes análogas?

# Señales Especiales en Tiempo Discreto



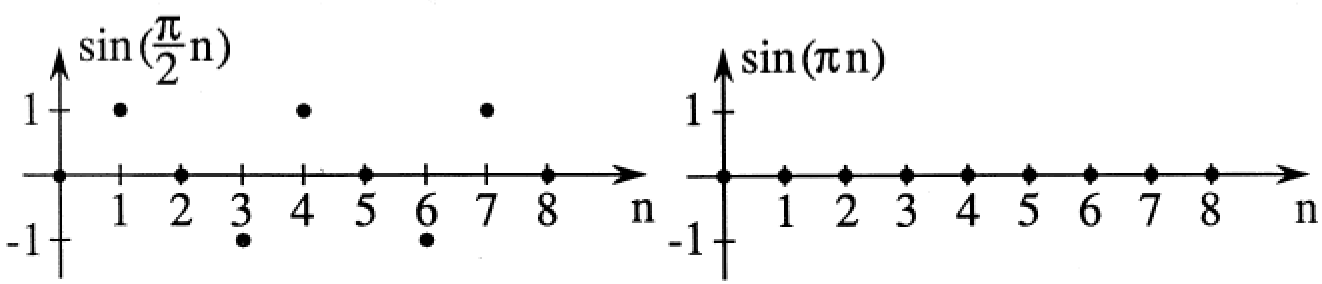
- **Rectángulo (ventana cuadrada)**
  - $w(n) = u(n + N) - u(n - N)$
  - ¿Qué largo tiene esta señal?

  - MATLAB: $\text{rectwin}_{\text{N}}(n) = u(n) - u(n - N)$
  - Es la ventana más simple → No modifica la señal finita en la porción donde es distinta de cero
  - Cuando no se aplica una ventana a una señal se está usando ésta

# Señales Especiales en Tiempo Discreto



- **Sinusoides**
  - $x(n) = A\sin(\omega_0 n + \theta)$
  - Frecuencia: $\omega_0 = 2\pi/N$ para una señal con período N
  - Si $\omega_1 = \omega_0$, y $\omega_2 = \omega_0 + 2\pi k$ entonces $\omega_1$ es equivalente a $\omega_2$
  - Dependiendo de $\omega_0$, $x(n)$ puede verse no muy sinusoidal

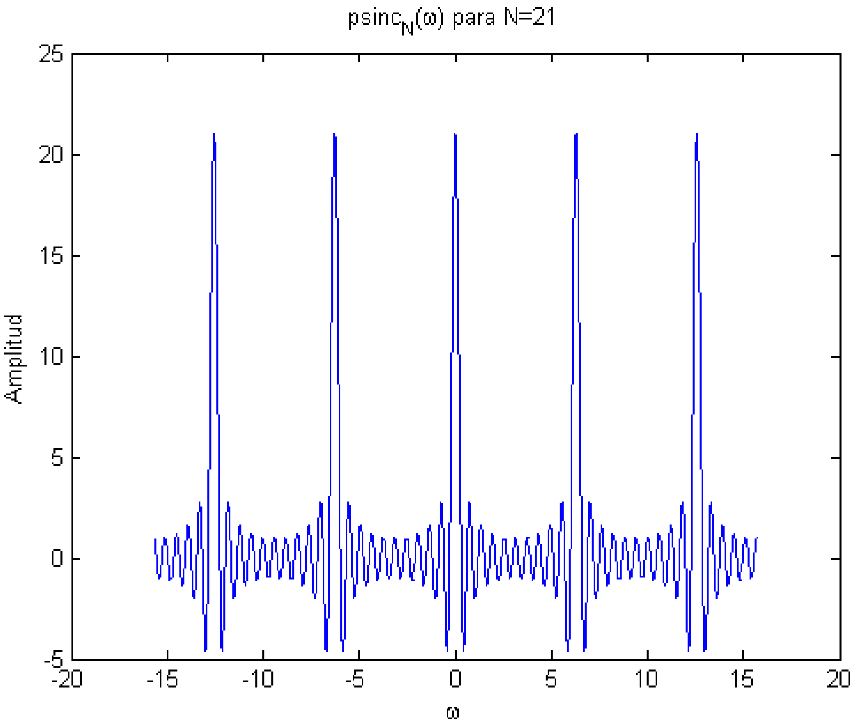



  - $x(n)$ es periódica si $\omega_0 = 2\pi(p/q)$, donde p y q son enteros, donde q sería el período

# Señales Especiales



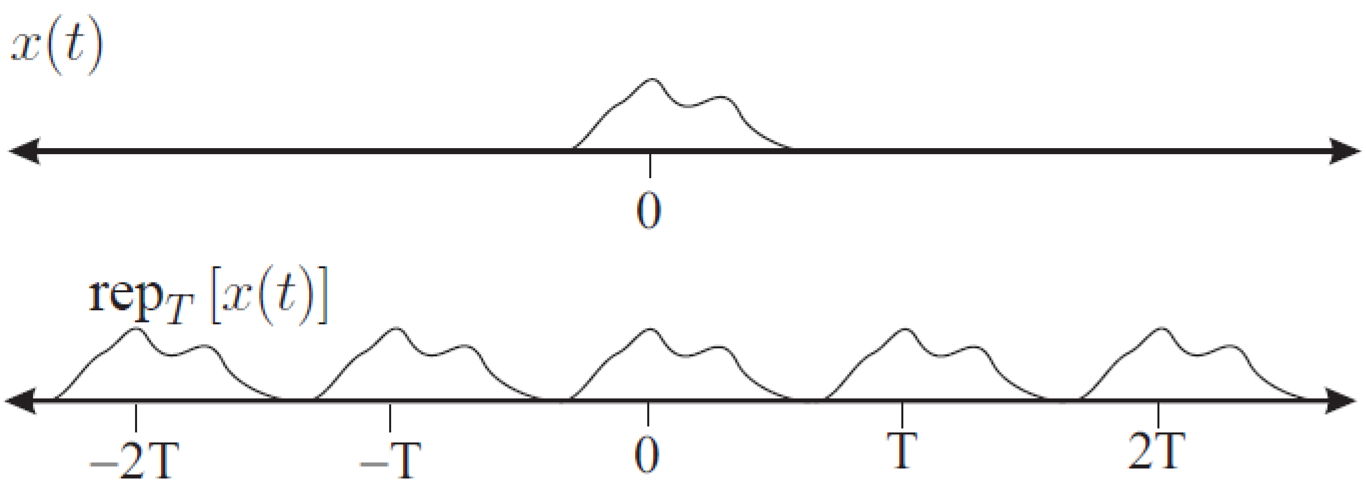
- **Sinc**
  - $\mathrm{sinc}(Tn) = \dfrac{\sin(Tn\pi)}{Tn\pi}$
  - La definición en tiempo discreto es igual a tiempo continuo
  - ¿Qué pasa con T=1?
  - Es conveniente definir otra función sinc periódica de período 2π y definida en el dominio de la frecuencia
  - $\mathrm{psinc}_N(\omega) = \dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$



# Señales Especiales: Operadores



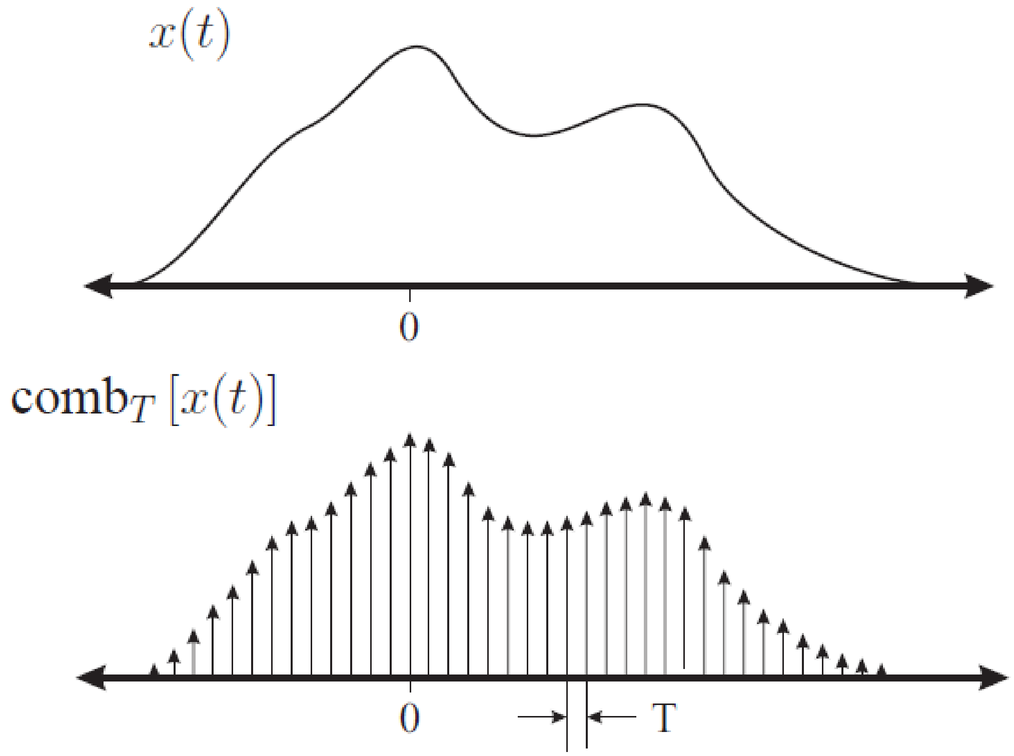
- **Operador Rep**
  - $\mathrm{rep}_{\mathrm{T}}[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$
  - Produce una señal periódica de período T
  - Definición se puede extender a tiempo discreto: ¿Cómo?
  - ¿Qué sucede si la señal $x(t)$ es también periódica?



# Señales Especiales: Operadores



- **Operador Comb**
  - $\mathrm{comb}_{\mathrm{T}}[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)x(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$
  - Produce una señal modulada por un tren de pulsos de período T
  - Definición se puede extender a tiempo discreto ¿Cómo?



# Señales Especiales



- **Pregunta**
  - ¿Cuál es la transformada de Fourier de éstas señales?
  - Intuición: Similar a las contrapartes análogas
  - Para poder contestar esto necesitamos estudiar la DTFT

# Señales Especiales



- **Operadores: CTFT**
  - Los operadores comb y rep se relacionan en el dominio de la frecuencia
  - ¿Cuál es la relación en tiempo y frecuencia entre las señales?:
    - Tiempo continuo vs discreto
    - Periódicas y aperiódicas
  - ¿Cuál es la CTFT de un tren de impulsos?

| Pares de CTFT |
| --- |

$$x(t) \overset{CTFT}{\Leftrightarrow} X(f)$$

$$\mathbf{comb}_T\left[x(t)\right] \overset{CTFT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\mathbf{rep}_{\frac{1}{T}}\left[X(f)\right]$$

$$\mathbf{rep}_T\left[x(t)\right] \overset{CTFT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\mathbf{comb}_{\frac{1}{T}}\left[X(f)\right]$$

# Señales Especiales



- **Tren de impulsos**
  - La CTFT de un tren de impulsos es también un tren de impulsos (con distinto espaciamiento y amplitud)
  - Reciprocidad en la separación de los impulsos en tiempo y frecuencia
  - Un tren de impulsos se puede representar con operadores comb y rep

$$\delta(t) \xleftrightarrow{CTFT} 1$$

$$s(t) = rep_T[\delta(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xleftrightarrow{CTFT} S(f) = \frac{1}{T}\operatorname{comb}_{\frac{1}{T}}[1] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$$