Conversión Análoga - Digital

ELO 313 –Procesamiento Digital de Señales con Aplicaciones
Primer semestre - 2012

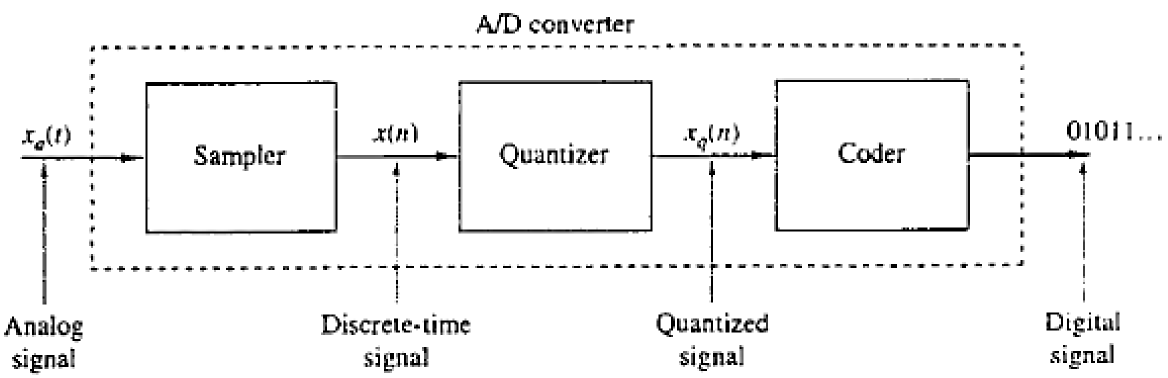
Matías Zañartu, Ph.D.
Departamento de Electrónica
Universidad Técnica Federico Santa María

Conversión de Señales

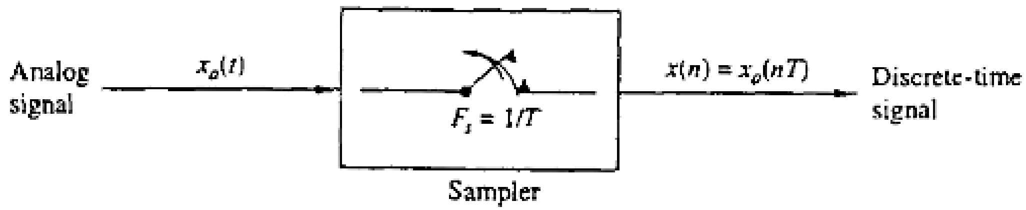
Conversión Análoga/Digital

Conversión Análoga/Digital

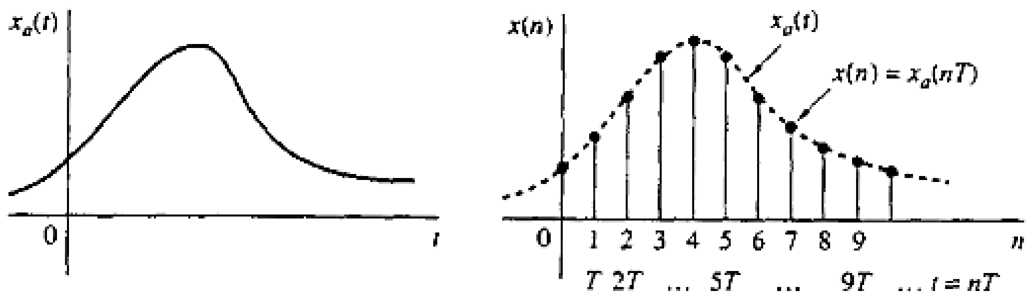
- **Tres etapas fundamentales:**
  - Muestreo
    - Señal en tiempo continuo a tiempo discreto
    - $x_a(t) \rightarrow x_a(nT_s) \equiv x[n]$ con Ts = tiempo de muestreo
  - Cuantización
    - Discretización de amplitud, i.e. $x[n] \rightarrow x_q[n]$
  - Codificación
    - Señal en tiempo y amplitud discreta a secuencia digital
    - $x_q[n] \rightarrow 01010011\ldots$



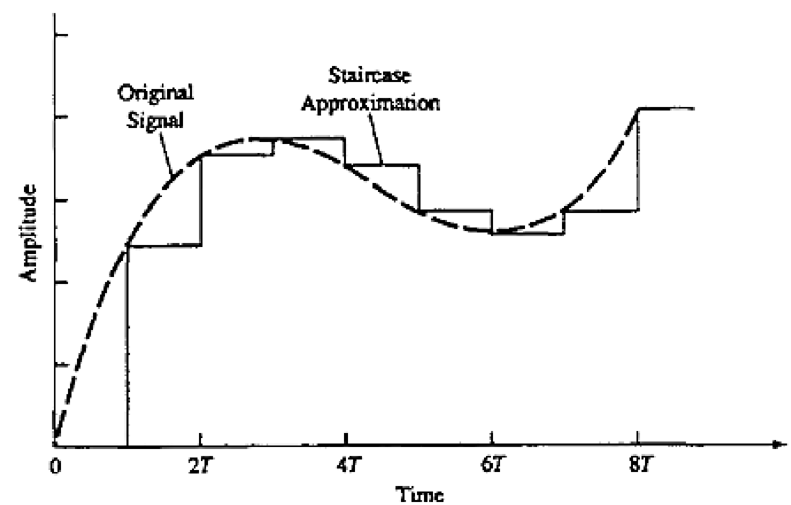
Conversión Análoga/Digital



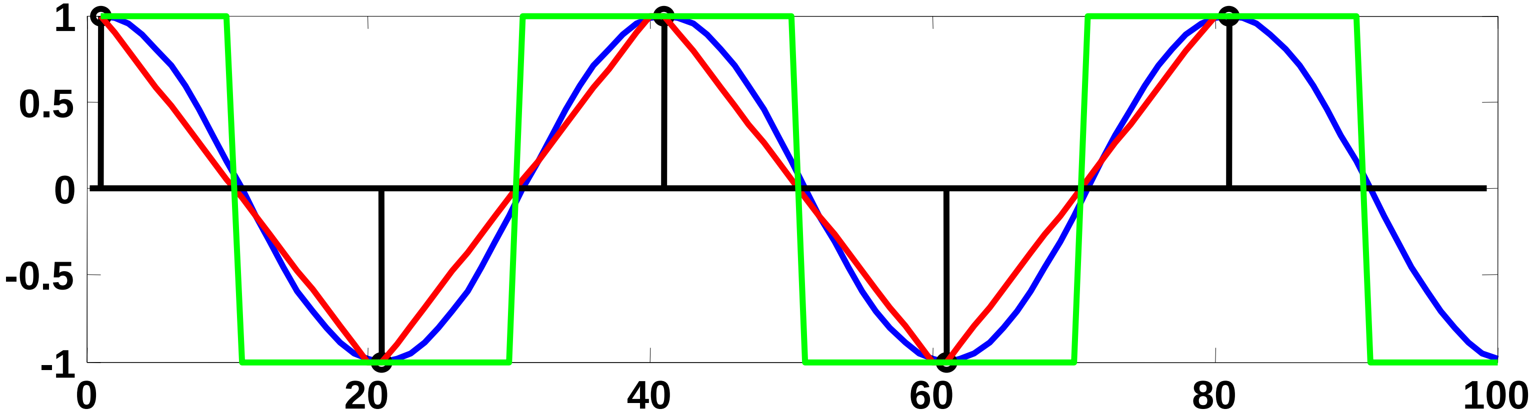
Muestreo



Cuantización y aproximación básica



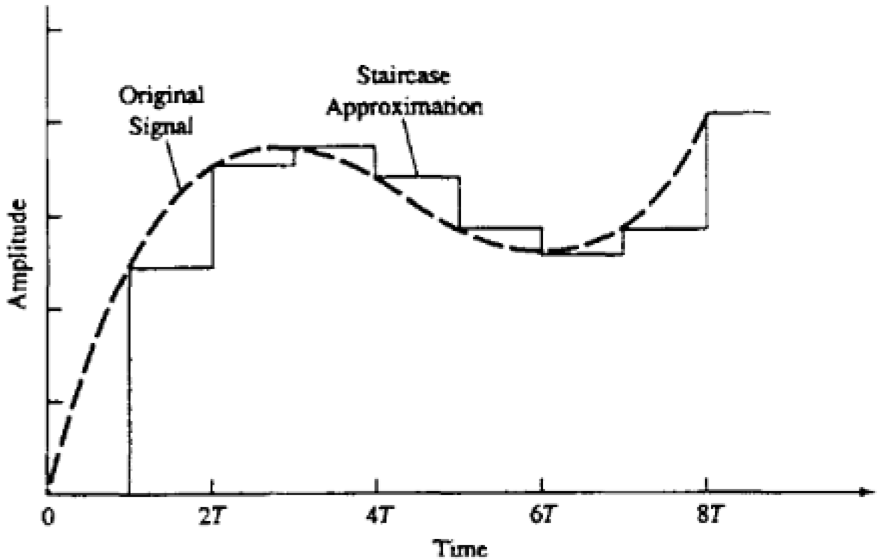
Reconstrucción de una señal muestreada

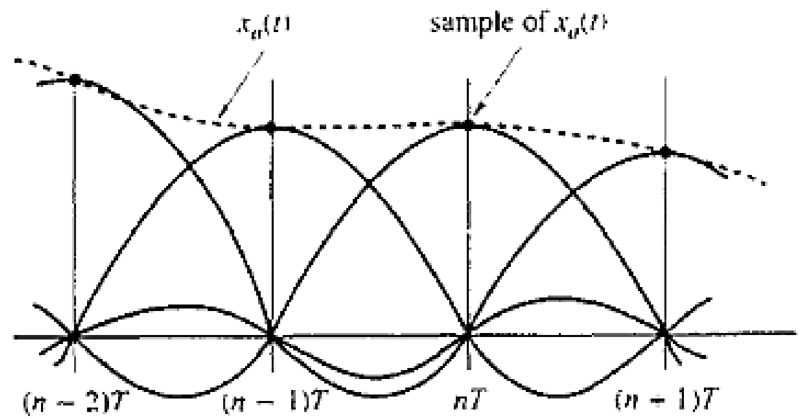


Observaciones y preguntas:

- Es la posible asociar múltiples señales a una señal muestreada
- ¿Qué hace el comando `plot` de MATLAB?
- El teorema del muestreo establece un método de reconstrucción PERFECTA ¿Cómo es esto posible?

Reconstrucción de una señal muestreada



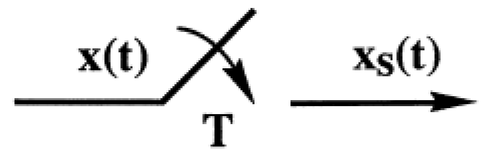


Reconstrucción usando el método ZH (zero hold)

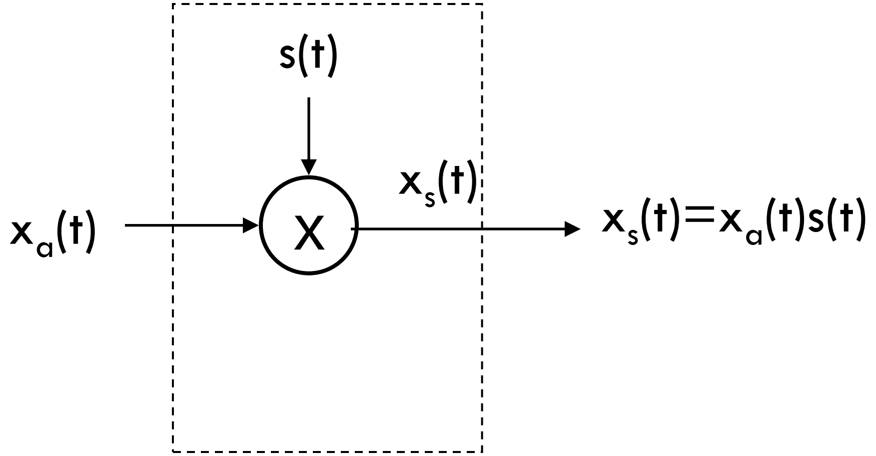
Reconstrucción usando señales sinc

Muestreo de una señal análoga

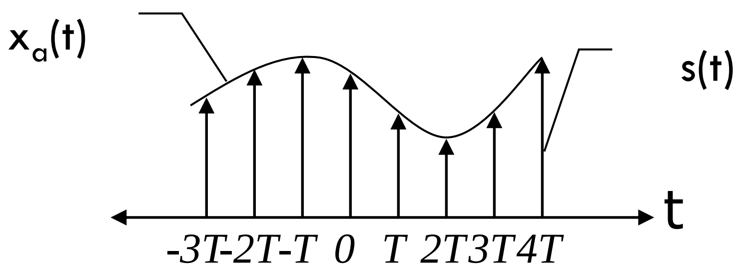
- **Interpretaciones del muestreo**
  - Interrupciones:
    - T es el tiempo de muestreo



  - Modulación de un tren de pulsos:
    - s(t) es la señal moduladora (un tren de impulsos ideal)



  - Resultado:



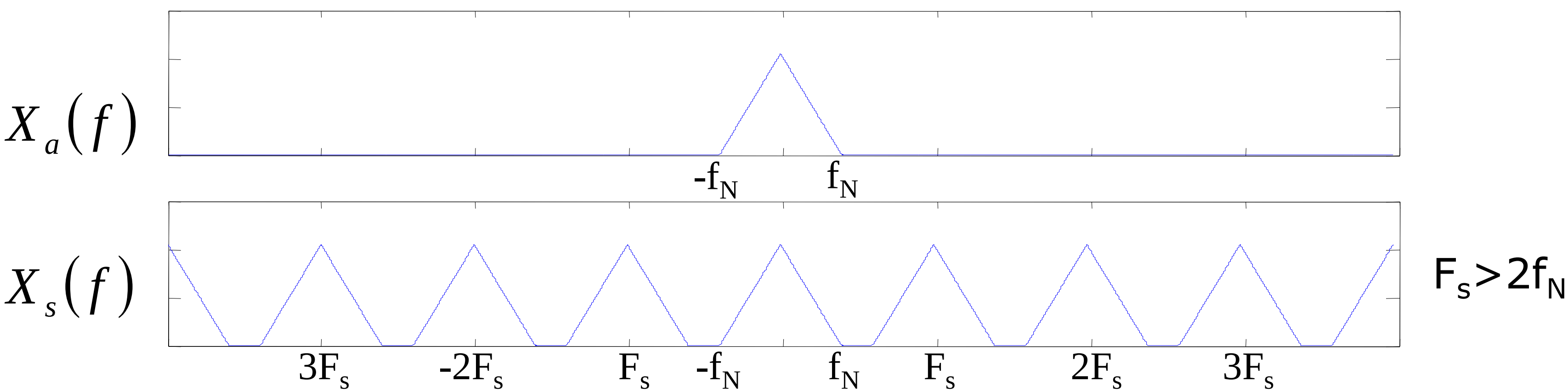
OBS:

- La señal resultante en esta etapa es aun en tiempo continuo
- ¿Cuál es la CTFT de $x_s(t)$?
- ¿Es esta implementación factible?

Muestreo de una señal análoga

- **Modulación en frecuencia**

$$
\begin{aligned}
x_s(t) &= x_a(t)s(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT_s) \\
&= \mathrm{comb}_{T_s}[x_a(t)]
\end{aligned}
\quad \xleftrightarrow{CTFT} \quad
\begin{aligned}
X_s(f) &= X_a(t) * S(f) \\
&= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(f - k\frac{1}{T_s}\right) \\
&= F_s\, \mathrm{rep}_{F_s}[X_a(f)]
\end{aligned}
$$



Muestreo de una señal análoga

- **Modulación en frecuencia**
  (Lo mismo en otras palabras)

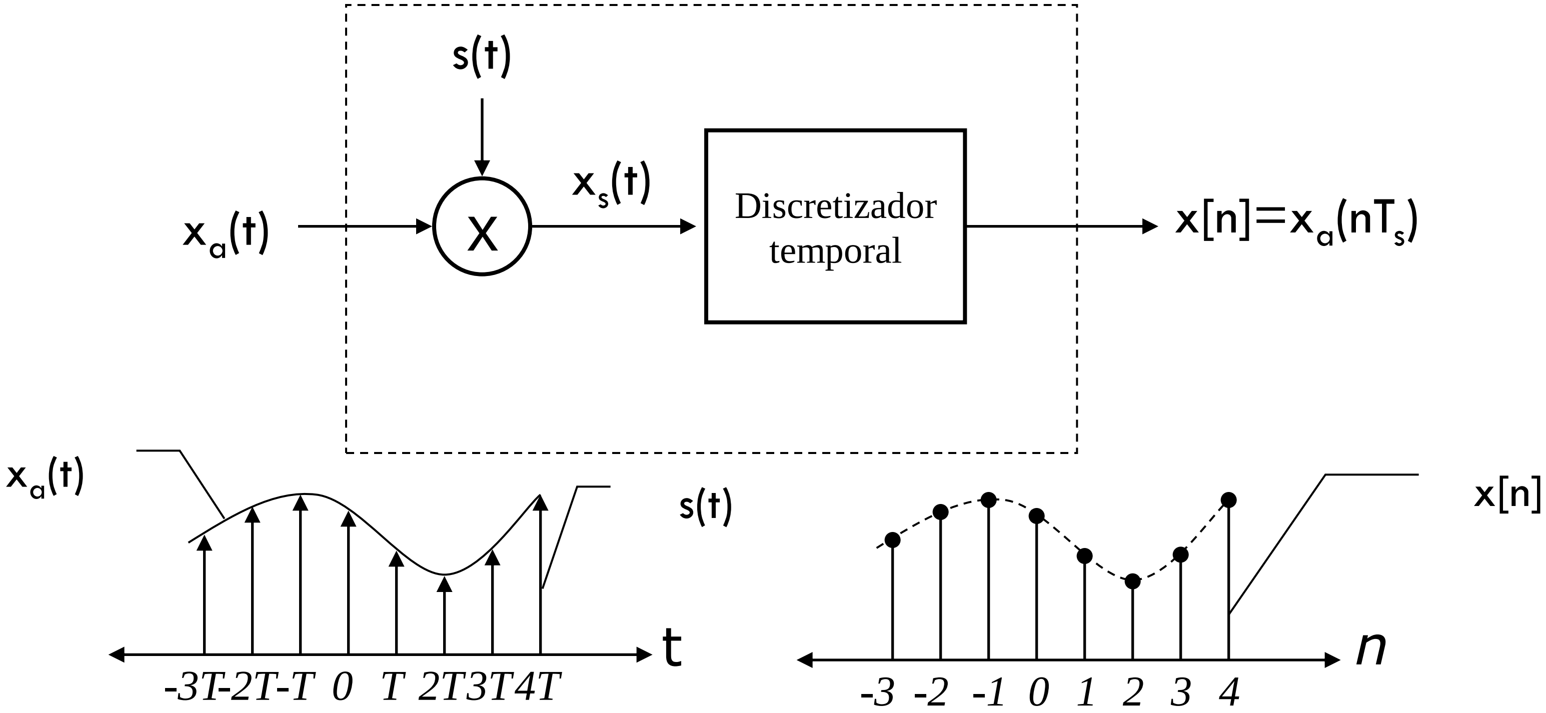
$$x_s(t) = x_a(t)s(t) \qquad \xleftrightarrow{CTFT} \qquad X_s(f) = X_a(f) * S(f)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \mathrm{rep}_{T_s}[\delta(t)] \qquad S(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_s) = F_s \mathrm{comb}_{F_s}[1]$$

$$x_s(t) = x_a(t)s(t) \qquad \xleftrightarrow{CTFT} \qquad X_s(f) = X_a(f) * F_s \mathrm{comb}_{F_s}[1] = F_s\, \mathrm{rep}_{F_s}[X_a(f)]$$

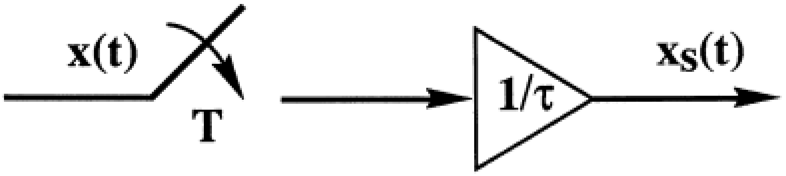
Muestreo de una señal análoga

- **Muestreo y modulación: Primera corrección**
  - Es necesario discretizar la señal para pasar de tiempo continuo a tiempo discreto

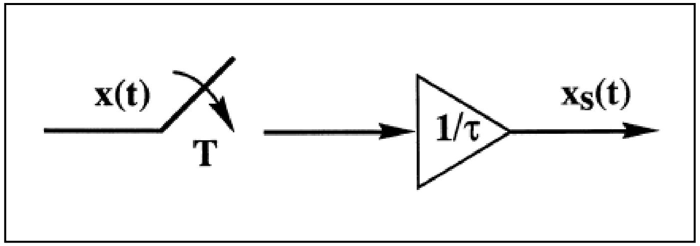


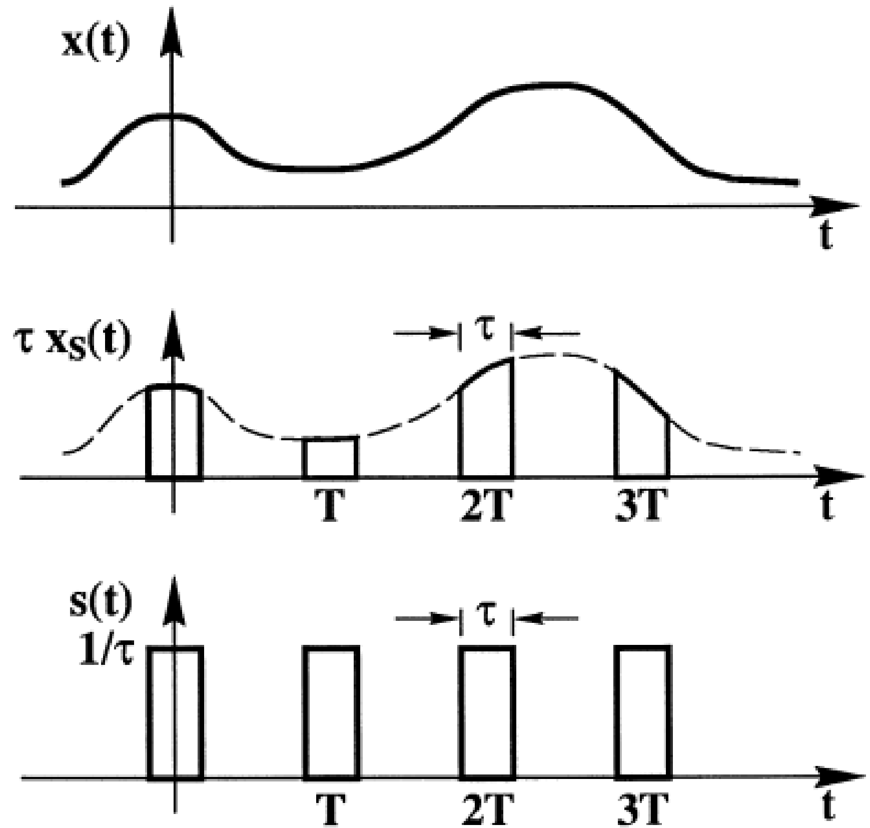
Muestreo de una señal análoga

- **Muestreo y modulación: Segunda corrección**
  - Es necesario integrar sobre un periodo de tiempo en la práctica (no existen los impulsos instantáneos en tiempo continuo)
  - Se debe corregir (amplificar) el efecto de integrar en el tiempo



Muestreo y modulación con implementación factible





$x_S(t) = s(t)\, x(t)$

Muestreo y modulación con implementación factible

$$X_s(f) = S(f) * X(f)$$

$$s(t) = \mathrm{rep}_T[\frac{1}{\tau}\ \mathrm{rect}\ (\frac{t}{\tau})]$$

$$S(f) = \frac{1}{T}\ \mathrm{comb}_{\frac{1}{T}}\ [\mathrm{sinc}\ (\tau f)]$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k \mathrm{sinc}\ (\tau k/T)\ \delta(f - k/T)$$

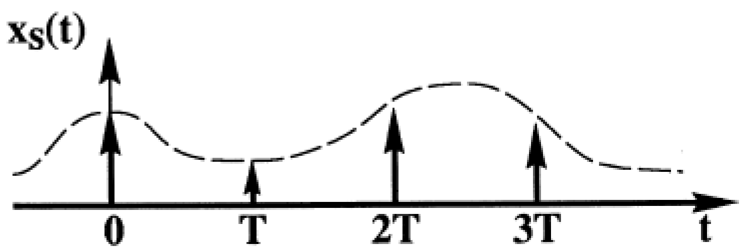
$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_k \mathrm{sinc}\ (\tau k/T)\ X(f - k/T)$$

Muestreo y modulación con muestreo ideal

$\tau \longrightarrow 0?$

$$\mathrm{s(t)} \longrightarrow \sum_{\mathrm{m}} \delta(\mathrm{t - mT})$$

$$\mathrm{x_s(t)} \longrightarrow \sum_{\mathrm{m}} \mathrm{x(mT)}\ \delta(\mathrm{t - mT}) = \mathrm{comb_T[x(t)]}$$



$$\mathrm{X_s(f)} \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{X(f - k/T)} = \frac{1}{\mathrm{T}}\ \mathrm{rep}_{\frac{1}{\mathrm{T}}}\ [\mathrm{X(f)}]$$

Teorema del Muestreo

- **Teorema del Muestreo**
  - Nombres: Nyquist, Shannon, Nyquist–Shannon–Kotelnikov, Whittaker–Shannon–Kotelnikov, Whittaker–Nyquist–Kotelnikov–Shannon
  - Define la frecuencia de muestreo que permite reconstrucción ideal
  - Requiere conocer el contenido de frecuencias (espectro) de la señal análoga, en particular: $f_{\max}$
  - Condición que establece: $\boxed{F_s \geq 2 f_{\max}}$
  - El caso límite donde $F_s = 2 f_{\max}$ se conoce como el límite de Nyquist

    $\rightarrow$ dos muestras para el período asociado a $f_{\max}$

    $\rightarrow$ puede coincidir con ceros, por lo que es más seguro $F_s > 2 f_{\max}$

Teorema del Muestreo

- **Teorema del Muestreo (Formal)**
  - Si la frecuencia más alta f_{max} contenida en una señal análoga $x_a(t)$ y la frecuencia de muestreo $F_s \geq 2f_{max} = 2B$ entonces la señal puede ser reconstruida perfectamente usando una función de interpolación *g(t)* dada por

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} = \mathrm{sinc}(2Bt)$$, de modo que

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right)$$, y donde

$$x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = x_a(nT_s) \equiv x[n]$$ son las muestras de $x_a(t)$

Teorema del Muestreo

- **Teorema del Muestreo**
  - La función sinc tiene un interés más teórico que práctico
    - La función sinc en frecuencia es el pasabajo ideal (rectwin)
    - Otros filtros pasabajo resultan más prácticos
  - Rango de frecuencia digital:
    - En Radianes: $[-\pi, \pi] \leftrightarrow [0, 2\pi]$
    - En Hz: $[-Fs/2, Fs/2] \leftrightarrow [0, Fs]$
    - En frecuencia normalizada: $[-1/2 , 1/2] \leftrightarrow [0, 1]$
  - ¿Es el teorema del muestreo el fin de esta historia? NO
    - Temas de investigación: Errores de cuantización, métodos de interpolación, eficiencia , oversampling

Aliasing en frecuencia

- **Aliasing**
  - Distorsión en la composición espectral de una señal (por ende en la señal) producto de un muestreo inadecuado
    - Señal muestreada es periódica en 2π
    - Si el ancho de banda no queda entre 0 y $\pi \rightarrow$ Superposición de componentes con otros periodos
  - ¿Qué pasa cuando una señal sinusoidal se ve afectada por aliasing?

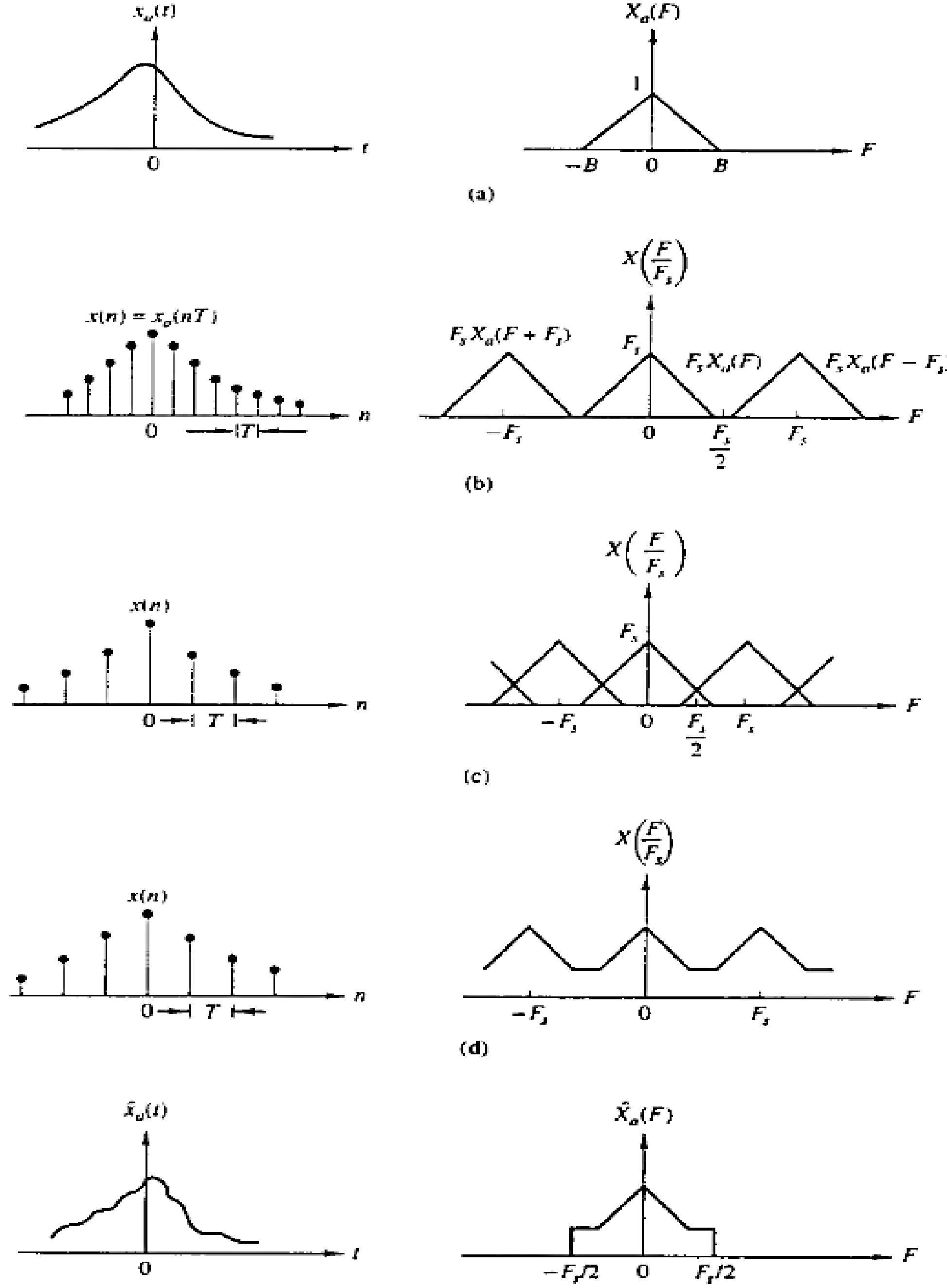
  - Siempre se necesita un filtro anti-aliasing (pasabajo) que permita "asegurar" que se cumple al menos el límite de Nyquist
    - ¿Se puede realmente asegurar que se cumple el límite?
    - ¿Qué criterios de diseño debiese tener este filtro?
    - No todos los DAQ cuentan con este filtro, el cual es generalmente análogo. ¿Es posible hacer un filtro anti-aliasing digital?

Aliasing en frecuencia

Sin aliasing

Con aliasing

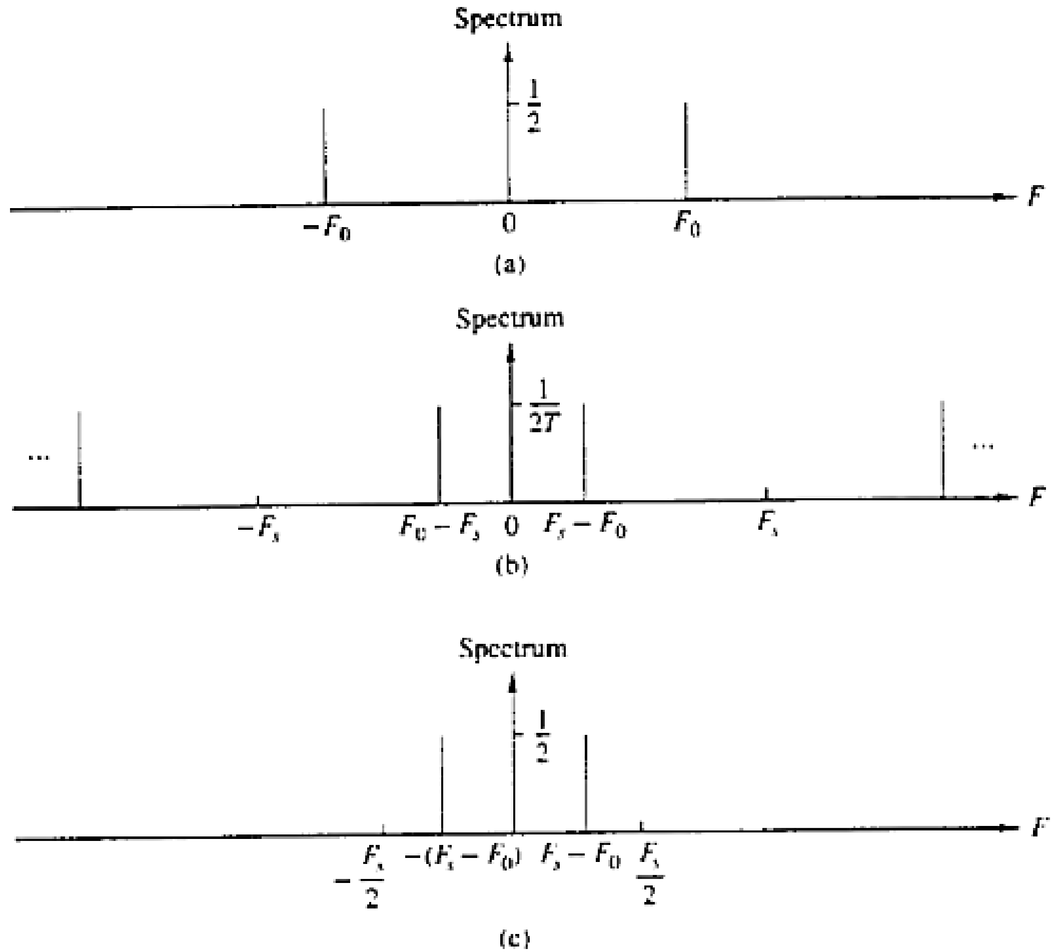
Distorsión temporal
por aliasing en frecuencia



Aliasing en frecuencia para tonos puros

Con aliasing

Distorsión temporal
por aliasing en frecuencia



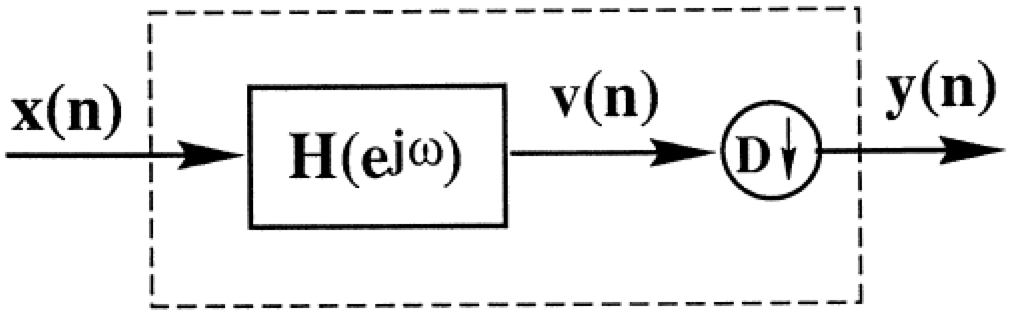
Conversión de Señales

Muestreo de señales discretas

Downsampling vs. Decimation

- **Downsampling**
  - Operación sujeta a aliasing
  - Operación que puede generar pérdidas de altas frecuencias
  - Al agregar un filtro anti-aliasing (pasa-bajo) ANTES de realizar la operación de downsampling, se elimina la distorsión por aliasing

Decimation:



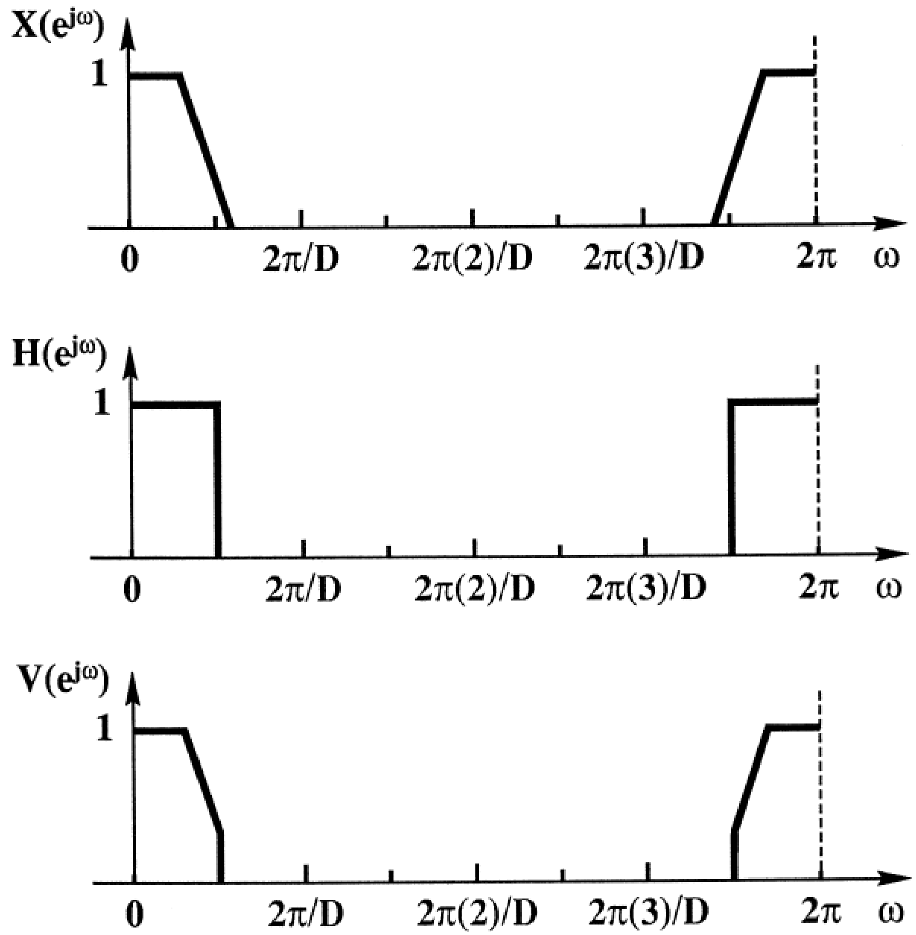
- Comandos de MATLAB: `downsample & decimate`

Downsample vs. Decimation

Espectro Original

Filtro pasa-bajo

Espectro Filtrado



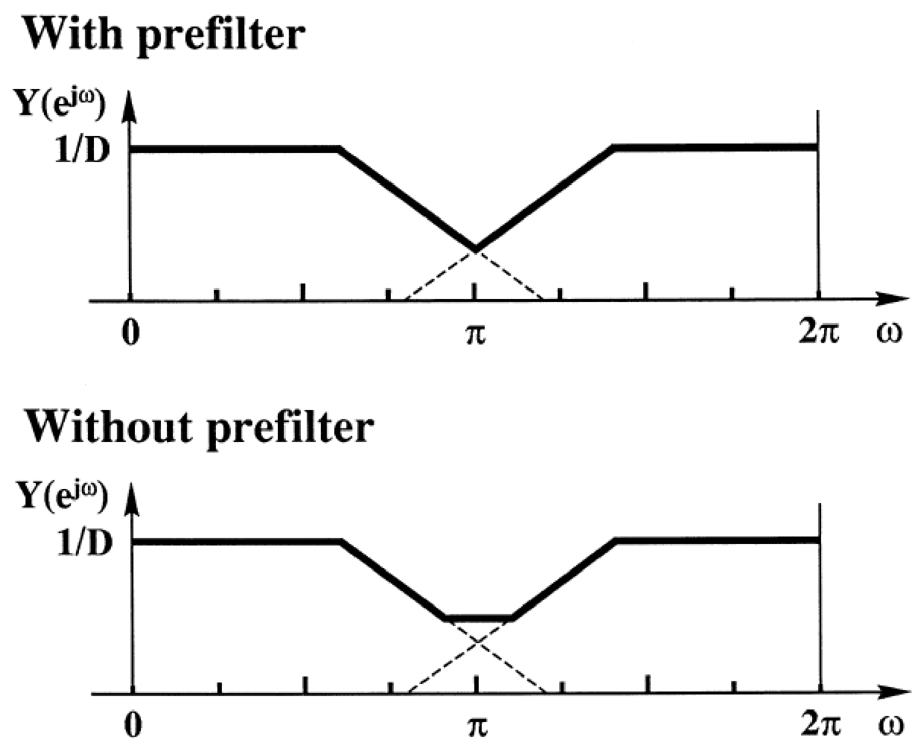
D= 4

El filtro debe asegurar que sólo exista señal en $\pm\ \pi/D$

Downsample vs. Decimation

En este caso downsampling producirá perdidas de altas frecuencias incluso con un filtro anti-aliasing

El filtro pasa-bajo sólo previene el aliasing

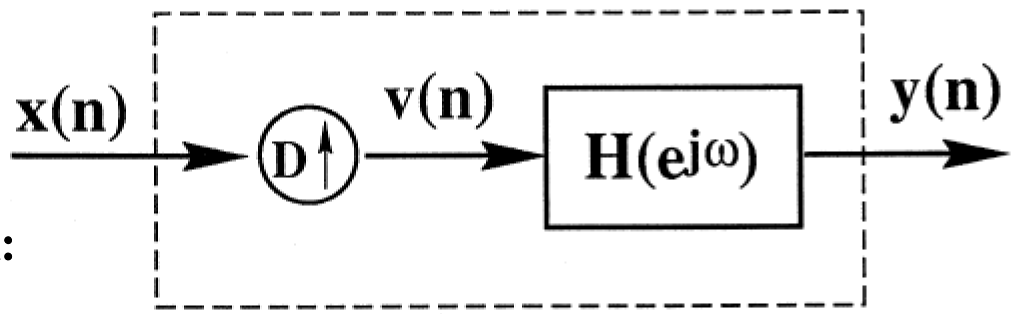


¿Si se aplica upsampling en este caso, se recupera la señal original?

Upsampling vs. Interpolación

- **Upsampling**
  - Operación que escala todo el espectro (incluidas las replicas)
  - Operación que puede generar nuevas altas frecuencias: ¿De dónde vienen?
  - Al agregar un filtro pasa-bajo (anti-aliasing) DESPUES de realizar la operación de upsampling, se eliminan las nuevas frecuencias altas

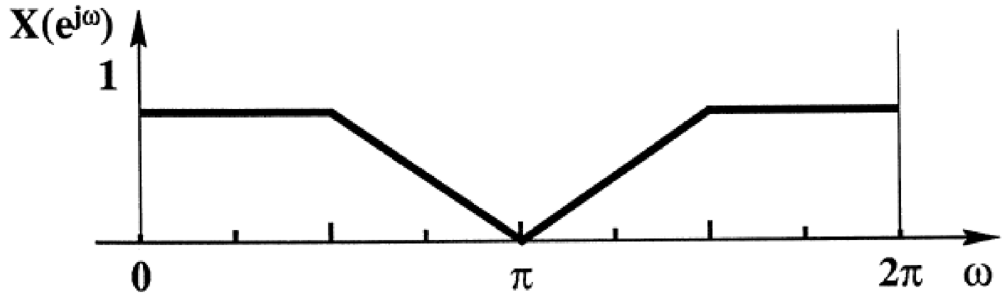
Interpolación:



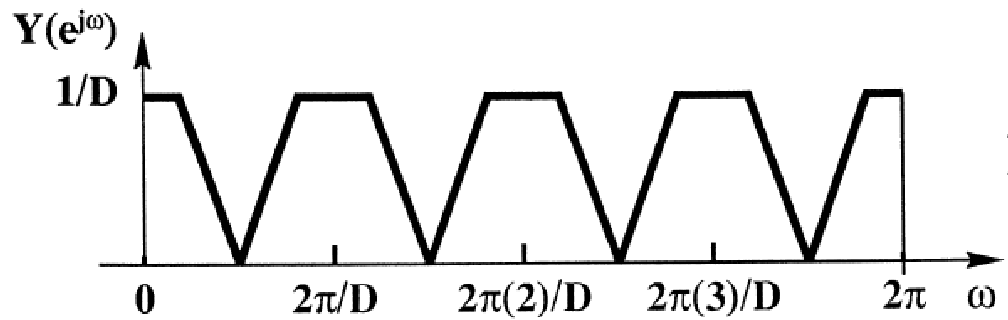
- Comandos de MATLAB: `upsample & interp`

Upsample vs. Interpolación

Espectro Original



Espectro luego de la operación upsample

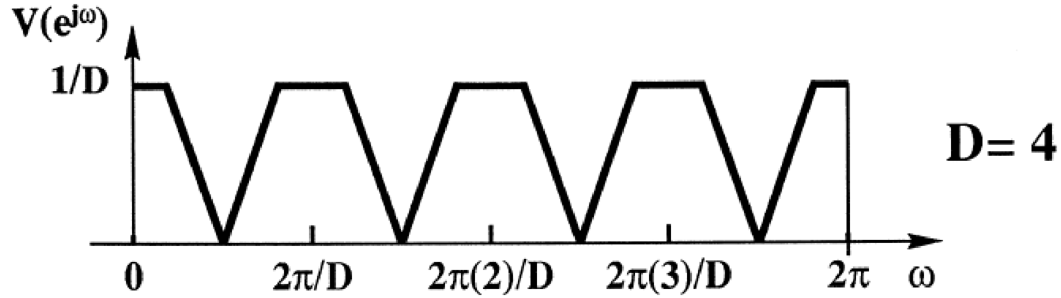


D= 4

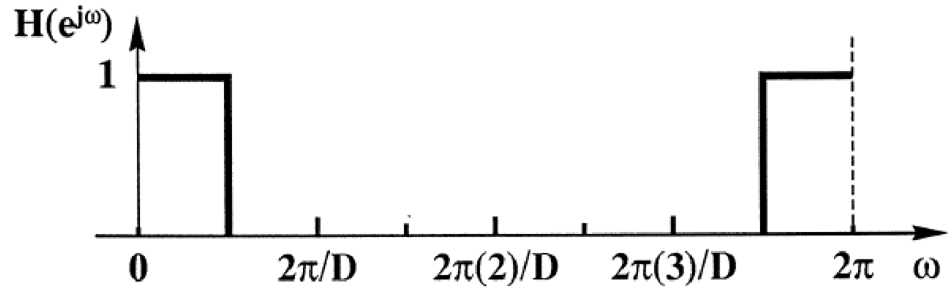
Las componentes periódicas en 2π también se escalan con la operación upsample y quedan en $2\pi/D$

Upsample vs. Interpolación

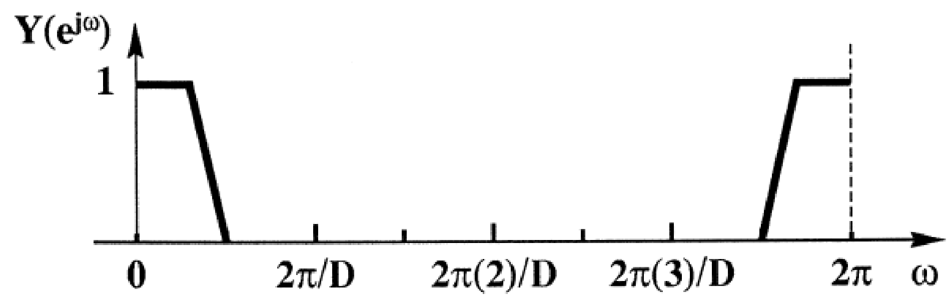
Espectro después upsampling



Filtro pasabajo



Espectro después de una operación de interpolación

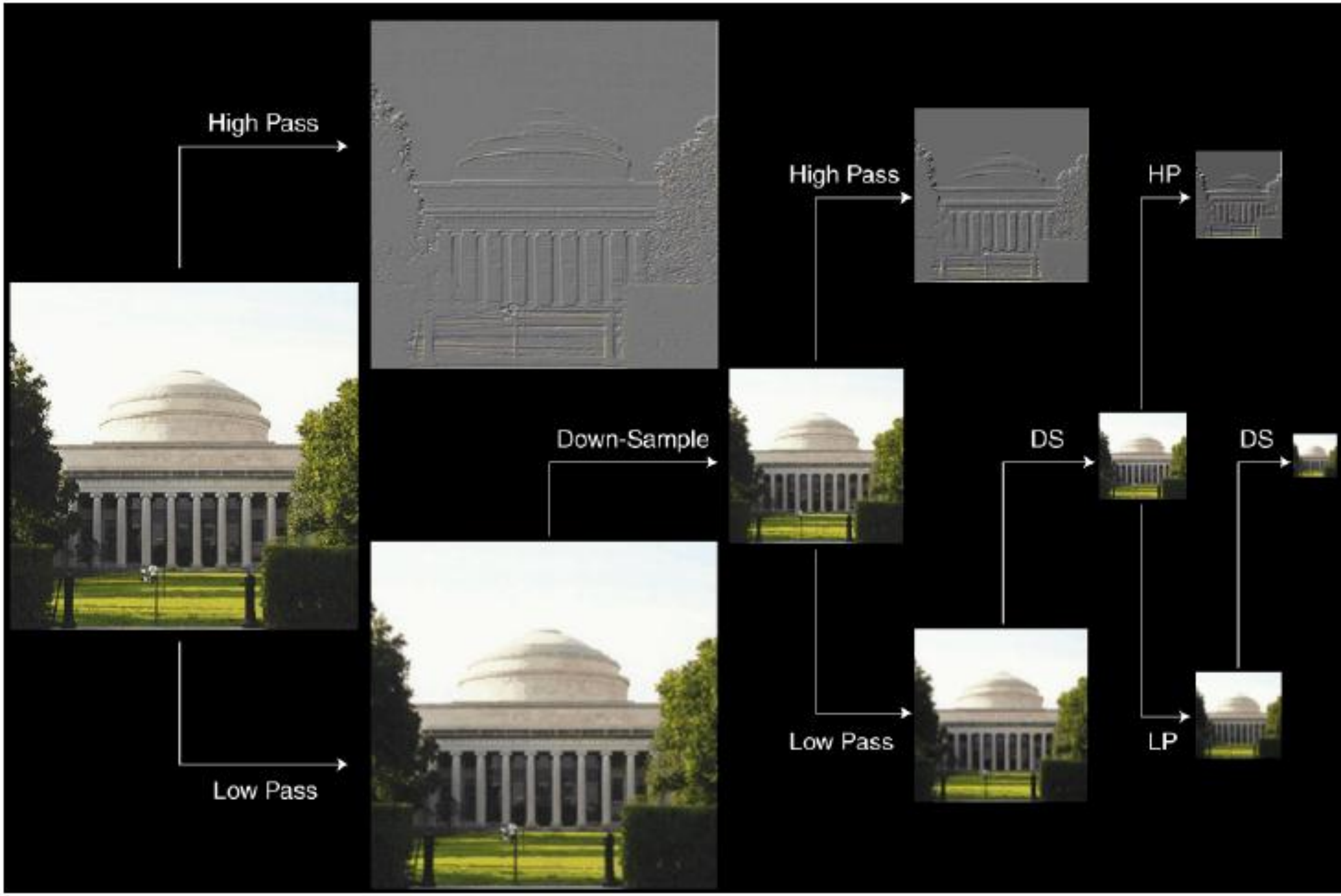


Muestreo de una señal discreta

- **Problema**
  - ¿Si tengo una señal muestreada a fs=8000 Hz, cómo la puedo convertir a una con fs=11025?
- **Resampling**
  - Equivalente a las operaciones decimation /interpolate, pero donde D es una fracción (p/q) y no necesariamente un entero
  - Para lograr cambio de fs (o cambio de largo) se utiliza:
    1. Aplicar upsampling por un factor p
    2. Filtrar con un filtro pasa-bajo la señal de 1→ decimation/interpolation
    3. Downsampling la señal de 2 por un factor q
  - Comando de MATLAB: `resample`

Aplicaciones

- **Muestreo de señales discretas**
  - Operaciones downsampling/decimation y upsampling/interpolación tienen gran aplicación en DSP
  - Casos típicos: FFT, compresión de audio e imágenes, refinamiento progresivo de audio e imágenes
    - **FFT:** Calcula espectro luego de repetidas operaciones downsampling
    - **Compresión de audio e imágenes**: Menos sensibilidad en altas frecuencias → menos resolución es requerida en esas bandas
    - **Refinamiento progresivo**: Transmitir señal después del downsampling primero y agregar componentes de alta frecuencia progresivamente



MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu