TRANSFORMADA Z y sus aplicaciones en sistemas LTI

¿Qué es la transformada Z?

- Es una representación para señales en tiempo discreto mediante una serie infinita de números complejos.
- Es una herramienta muy útil y poderosa para estudiar sistemas en tiempo discreto, y es el equivalente a la transformación de Laplace, pero en tiempo discreto.
- Existen formas de ir del Plano S al Plano Z, vinculando estas dos transformadas aun mejor.

DEF) TRANSFORMADA DIRECTA (DE SOPORTE DOBLE)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

, donde z es una variable compleja

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

OBS) Existe una versión con soporte derecho solamente, que se usa para estudiar sistemas no relajados (no en esta asignatura)

OBS) Por ser una serie infinita la transformada existe sólo donde la serie converge.
la región de convergencia (ROC) de $X(z)$ son todos los valores de z donde $X(z)$ toma un valor finito → (generalización de la idea de polos de $X(z)$)
(i.e., la suma converge)

ejemplos

i) $x(n) = \{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 5, 7, 0, 1 \} \rightarrow X(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$, ROC: $\forall z - \{z=0$

ii) $x(n) = \{ 1, 2, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1 \} \Rightarrow X(z) = z^{2} + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$; ROC: $\forall z - \{z=\infty$
$- \{z=0$

iii) $x(n) = \{ \underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1 \}$ $X(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$
ROC: $\forall z - \{z=$

iv) $x(n) = \delta(n)$ $\quad X(z) = 1 \quad \forall z$

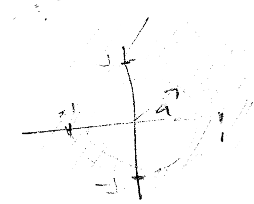
v) $x(n) = \delta(n-k)$ $\quad X(z) = z^{-k} \quad \forall z - \{z=0\} \quad k>0$

vi) $x(n) = \delta(n+k)$ $\quad X(z) = z^{k} \quad \forall z - \{z=\infty\} \quad k>0$

OBS] Para señales finitas ROC es siempre $\forall z$ (Todo el plano z) menos 0 y/o infinito. (Suma de ceros)

v) $x(n) = a^n u(n)$,

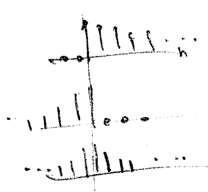
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$



ROC: $|a z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$

vi) $x(n) = e^{jw_0 n} u(n) \Rightarrow \dfrac{1}{1 - e^{jw_0} z^{-1}}$

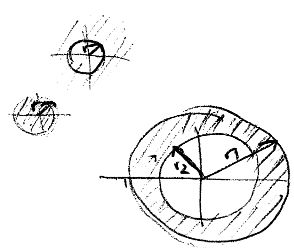
OBS] la señales infinitas tienen ROC asociado a un radio r $(r>0)$



Soporte derecho - causales $|z| > r$

Soporte izquierdo - anti-causales $|z| < r$

\- Soporte doble $r_2 < |z| < r_1$



ojo: figuras de la tabla 3.1 (p. 158 PEM)

Polos y ceros

- los ceros de $X(z)$ se producen cuando $X(z) = 0$
- Los polos de $X(z)$ se obtienen cuando $X(z) = \infty$

Si $X(z)$ es una Función racional

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{z^M + (b_1/b_0) z^{M-1} + \cdots + (b_M/b_0)}{z^N + (a_1/a_0) z^{+N-1} + \cdots + (a_N/a_0)}$$

suponiendo que b_0 y $a_0 \neq 0$

$$= \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

$$= G z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}, \quad G = b_0/a_0$$

OBS) $X(z)$ tiene N polos, M ceros y $|N-M|$ ceros $(N>M)$ o polos $(N<M)$ en el origen.

OBS) Polos se dibujan con "x" y los ceros con "o"

Ejemplo

$$x(n) = a^n u(n) \qquad a > 0$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \leftarrow \text{polo en } z=a$$

ROC: $|z| > a$

$\Rightarrow$ Esta señal se obtiene con un polo en $z=a$ y un cero en $z=0$

OBS) Todas las señales tienen asociados polos y/o ceros

TRANSFORMADA DE Z INVERSA

DEF) $$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

integral en un contorno cerrado dentro de ROC

OBS) Dado que $X(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$, normalmente utilizamos inversión de $X(z) \to x(n)$ mediante propiedades de la transformada y casos de señales conocidas. (ver tabla 3.3 pag 174)

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

1) LINEALIDAD : si $x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$ y $x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$ entonces

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

2) CORRIMIENTOS TEMPORALES : si $x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$

entonces $x(n-k) \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k} X(z)$

3) MODULACIÓN si $x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, $a \neq 0$

entonces $a^n x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z/a) = X(a^{-1} \cdot z)$

4) REVERSAMIENTO TEMPORAL : si $x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$

entonces $x(-n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1})$

5) CONVOLUCIÓN

si $x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$

$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$

entonces $x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)\,X_2(z)$

6) MULTIPLICACION POR INDICE DE TIEMPO $\quad n\,x(n) \xleftrightarrow{z} -z\,\frac{d}{dz}[X(z)]$

7) CONJUGACION

si $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$

$x^*(n) \longleftrightarrow X^*(z^*)$

8) PARTE REAL $\quad \text{Real}(x(n)) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$

PARTE IMAG $\quad \text{Imag}(x(n)) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$

$$\boxed{\text{TRANSFORMADA } z \text{ en sistemas LTI}}$$

obs) Por la propiedad de convolución $\quad y(n) = x(n) * h(n)$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$\text{donde} \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

<u>Aplicaciones y ejemplos clásicos</u>

(1) Dado una ecuación de differencia encontrar polos y ceros:

→ Tomar $y(n) = S(x(n))$

→ Aplicar transformada z $\Rightarrow Y(z) = X(z)\,H(z)$

→ Agrupar polinomios $\quad H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

→ Encontrar $D(z) = 0 \Rightarrow$ polos

$N(z) = 0 \Rightarrow$ ceros

(2) Dado un filtro $H(z)$ obtener la ecuación de diferencia:

→ $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$

→ $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$\rightarrow \quad Y(z) = X(z)\,H(z)$

$$Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)$$

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N]$$
$$= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M]$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

(3) Diseñar un Filtro que tenga P polos o ceros:

- Crear $H(z) = \dfrac{(z-z_1)\cdot \dots (z-z_p)}{(z-p_1)\cdots(z-p_p)}$

- Poner $H(z)$ en la forma polinómica

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Aplicar el método de 2) para expresarlo como una ecuación de diferencia

OBS | • Polos y ceros se pueden cancelar, pero en la práctica ésto es una práctica peligrosa por errores de redondeo, si ese fuera una consideración de diseño de un Filtro.

• ejemplo

$$y[n] = y[n-1] + x[n] - x[n-1]$$

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + X(z) - X(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}} = 1$$

$$h[n] = \delta[n]$$

Cancelar un polo en $z=1$ con un cero en $z=1$ es arriesgado. sólo para valientes

OBS) · Polos y ceros en el origen no generan cambios en la magnitud del filtro, pero sí en la fase.

· Cuando se hace 3) (Diseño de un filtro mediante la ubicación de polos/zeros) es conveniente ubicar polos/ceros en origen (según corresponda) para mantener el mismo orden en el $D(z)$ y $N(z)$, lo que permite reconstruir la misma forma de

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

→ En otras palabras: siempre debemos tener la misma cantidad de polos que de ceros, aunque algunos pueden estar en el origen (generalmente los del origen se ignoran cuando se habla de filtros con "sólo polos" o "sólo ceros", pero están presentes)

→ para evitar retardos innecesarios de la salida/entrada

OBS) sistemas con
- "sólo polos": sin ceros $\neq 0$
- "sólo ceros": sin polos $\neq 0$

ejemplo un sistema de sólo polos conocido es LPC donde

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

¿tiene este sistema sólo polos?

$$\text{NO} \Rightarrow H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z^N}{\underbrace{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}_{N \text{ polos}}} \leftarrow N \text{ ceros (en el origen)}$$

sin embargo, como todos los ceros están en $z=0$, se le llama un sistema con "sólo polos".

OBS) $H(z)$ se puede descomponer en $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$ (serie)

o en $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ (paralelo) → Fracciones parciales → H_2

CAUSALIDAD Y ESTABILIDAD:

- Causal : $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$
- BIBO estable : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

$$\Rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} \Rightarrow |H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} \right|$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| |z^{-n}|$$

si $|z| \leq 1 \Rightarrow |H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$

Como $H(z)$ converge $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

OBS) Si $|z| \leq 1 \Rightarrow$ el sistema es BIBO estable
(i.e., ROC contiene al círculo unitario)

OBS) Para causalidad se requiere que $|z| > |r|$
(ver ejemplo $x[n] = a^n u[n]$) $\Rightarrow$ Fuera de un círculo dado por el polo más alejado

$\Rightarrow$ Causal + Estable : $|z| > r < 1$

$\rightarrow$ el polo más alejado debe estar dentro del círculo unitario para que ROC incluya al círculo unitario

$\Rightarrow$ todos los polos deben estar dentro del C.U.

OBS) los ceros no importan !!!

TRANSFORMACION de $S \leftrightarrow Z$

¿Cuál es la relación entre Laplace y Z?
¿Cómo se implementan filtros puramente análogos en forma digital?

→ Existen varias formas de transformar sistemas en el plano-S hacia el plano-Z, pero muchos de estos sistemas tienen problemas de aliasing al no respetar la periodicidad en 2π de sistemas discretos
(ejemplo: reemplazo polos/zeros en s directamente a z)

Transformada Bilineal:

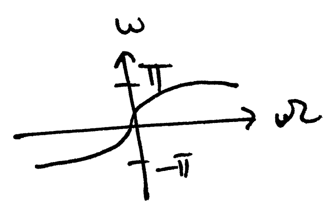
- Transforma el eje imaginario $j\Omega$ en el plano S al circulo unitario en el plano Z

$$S = \frac{2}{T_s}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

- la relación en frecuencia: $w = 2\tan^{-1}\left(\Omega \frac{T_s}{2}\right)$

$\Rightarrow \Omega = \infty \Rightarrow w = \pi$
$\quad\;\; = -\infty \Rightarrow w = -\pi$

No hay aliasing.



OBS) LHS en el plano S ⇒ interior de $|z| = 1$ en el plano Z
RHS en el plano S ⇒ exterior de $|z| = 1$ en el plano Z