Transformada discreta de Fourier (DFT)

Transformada z : $x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$

DTFT (directa) : $x(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$

DTFT (inversa) $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(w)\, e^{jwn}\, dw$

OBS)
- DTFT requiere calcular una suma infinita
- DTFT tiene espectro de frecuencia continuo (w)
- DTFT inversa requiere una integral.

OBS)
- Para calcular la DTFT necesitamos entonces:
  - i) Truncar la suma sobre limites finitos
  - ii) Discretizar $w = w_k$

al truncar $\hat{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$

y también $w_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$

$\Rightarrow$ $\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j 2\pi k n / N}}$ DFT de $x[n]$ con N puntos.

OBS)
- LA DFT es una versión truncada y muestreada de la DTFT
- N es la resolución espectral
- Si $N \to \infty$ DFT $\to$ DTFT

la inversa de la DFT requiere discretizar la inversa de la DTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

si $\omega \longrightarrow \omega_K = \frac{2\pi K}{N}$ $\quad K = 0, 1, 2, \dots, N-1$

entonces $\int_0^{2\pi} d\omega \longrightarrow \frac{2\pi}{N}\sum_{K=0}^{N-1}$

$$X(\omega) \longrightarrow X(K)$$
$$e^{j\omega n} \longrightarrow e^{j2\pi K n/N}$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} X(K)\, e^{j2\pi K n/N}}$$

DFT inversa de N puntos.
(IDFT)

- N es la resolución espectral. 1) Si $N \geq \text{length}(x[n])$ (largo de la señal)

  $\Rightarrow$ DFT inversa permite recuperar perfectamente $x[n]$

2) Si $N < \text{length}(x)$, la DFT inversa permite recuperar las N primeros muestras. $\rightarrow$ aliasing temporal!

OBS) El muestreo en frecuencia de una DTFT permite describir y recuperar perfectamente una señal finita periodica de periodo N

$$x_p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - mN) \quad \text{con}$$

$$x_p = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

PROPIEDADES DE LA DFT

1. Linealidad $\quad a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} a_1 X_1(K) + a_2 X_2(K)$

2. Corrimiento $\quad x(n - n_0) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X(K)\, e^{-j 2\pi K n_0/N}$

3. Modulación $\quad x[n]\, e^{j 2\pi K_0 n/N} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X(K - K_0)$

OBS] K_0, n, N son enteros. Si no, se produce un corrimiento en un número no entero K_0, lo que será truncado o redondeado dependiendo del sistema.

4. Reciprocidad $\quad X(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} N\, x(-K)$

5. Valor inicial $\quad \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = X(0)$

6. Periodicidad

$$x[n + mN] = x[n] \quad \forall m \text{ entero}$$
$$X(K + \ell N) = X(K) \quad \forall \ell \text{ entero}$$

OBS] $K = 0, \dots, N-1 \rightarrow [0, 2\pi) \Rightarrow N = 2\pi$

7. Relación con la DTFT

Si $x_0[n] \neq 0$ entre $0 \leq n \leq N-1$

$$x_0[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_0(\omega)$$

si hacemos $x_0[n]$ periódica para calcular DFT

$$x[n] = \sum x_0[n + mN]$$

$$x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X(K)$$

$$\Rightarrow X(K) = X_0(\omega = 2\pi K/N)$$

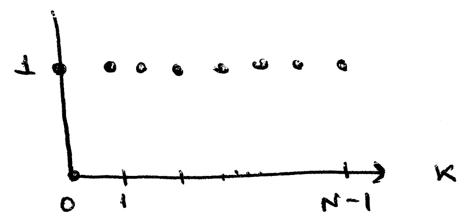
8. Parseval $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} |X(K)|^2$

OBS: · La energía contenida es la misma en tiempo o frecuencia.

$$\boxed{\text{PARES DE TRANSFORMADAS DFT}}$$

1. $x(n) = \delta(n)$, $0 \le n \le N-1$ $\quad\xleftrightarrow{DFT}\quad$ $X(K) = 1$, $0 \le K \le N-1$

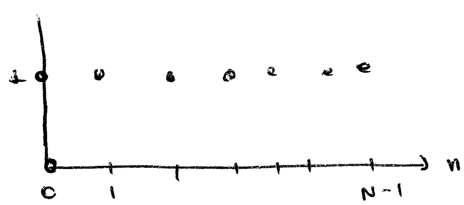
$\xleftrightarrow{DFT}$

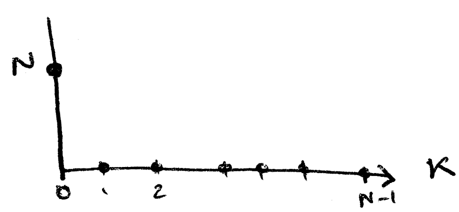


$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{j2\pi Kn/N} = 1 \cdot \cancel{e^{j2\pi 0 \cdot n/N}} = 1$$

DEMO usando definición y/o relación DTFT

2. $x(n) = 1$, $0 \le n \le N-1$ $\quad\xleftrightarrow{DFT}\quad$ $X(K) = N\,\delta(K)$, $0 \le K \le N-1$





DEMO: usando prop. de reciprocidad

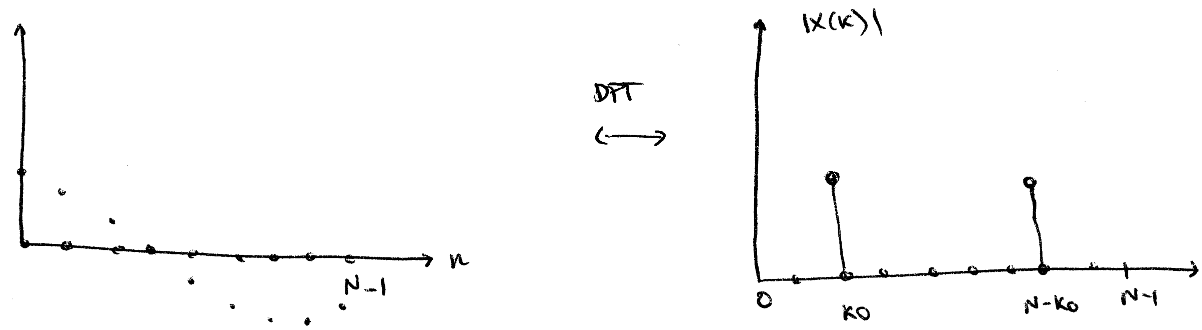
DEMO: usando propiedad modulación

3. $x[n] = e^{j2\pi K_0 n/N}$, $0 \leq n \leq N-1$ $\overset{DFT}{\longleftrightarrow}$ $X(K) = N\,\delta(K-K_0)$ $0 \leq K \leq N-1$

OBS) ¿Qué pasa si $K_0 \notin \mathbb{N}$? leakage! picket fence!

DEMO: usando linealidad

4. $x[n] = \cos(2\pi K_0 n/N)$ $0 \leq n \leq N-1$ $\overset{DFT}{\longleftrightarrow}$ $X(K) = \frac{N}{2}\left(\delta(K-K_0) + \delta(K-(N-K_0))\right)$ $0 \leq K \leq N-1$



OBS) ¿Qué pasa si $K_0 \notin \mathbb{N}$? leakage! picket fence!

5. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & M \leq n \leq N-1 \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN: usando prop. relación DTFT

$M < N$

$$\overset{DFT}{\longleftrightarrow} \quad X(K) = e^{j\frac{2\pi K}{N}\frac{(M-1)}{2}} \frac{\sin(2\pi K M/2N)}{\sin(2\pi K/2N)}$$

ANÁLISIS ESPECTRAL USANDO DFT

DFT y sus posibles implementaciones (e.g. radix-2 FFT) son muy utilizadas para estimaciones espectrales de señales. Hay que tener en cuenta las siguientes limitaciones al hacer esto:

1) Truncamiento produce "leakage" (efecto de ventanas)

El trabajar con una porción finita de una señal de largo N, implica que se produce necesariamente un efecto de ventana (leakage)

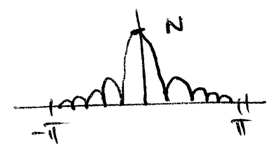
e.g. $x(n) = \cos(\omega_0 n) \xleftrightarrow{DTFT} X(\omega) = \text{rep}_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0)\right)$

si $w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$

ventana cuadrada

$\xleftrightarrow{DTFT} W(\omega) = e^{-j\omega(N-1)/2} \dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \Rightarrow$

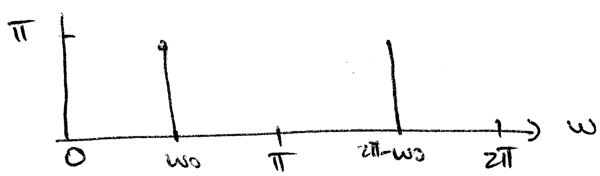
$|W(\omega)|$



$\Rightarrow y(n) = x(n) \cdot w(n) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega) * W(\omega)$

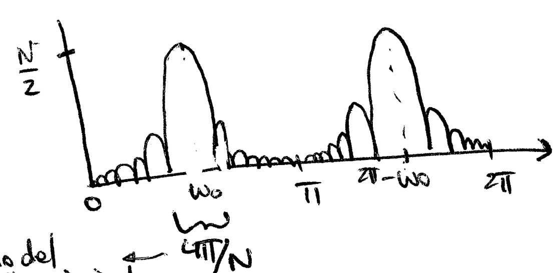
(DTFF) ESPECTRO SIN EFECTO DE VENTANAS

$|X(\omega)|$



(DTFT) ESPECTRO REAL

$|Y(\omega)|$



ancho del lóbulo principal

OBS) ¿Cómo corregir esto? 1) N grande reduce el ancho del lóbulo principal $\left(\frac{4\pi}{N}\right)$ 2) usar una ventana adicional (e.g. hann, gauss, bartlet, etc) reduce la amplitud de los lóbulos laterales pero ensancha el lóbulo principal $\left(\frac{8\pi}{N}\right)$

⇒ "rectwin" tiene el lóbulo principal más angosto, pero los lóbulos laterales más pronunciados de todas las ventanas!

2) Muestreo en frecuencia produce "picket-fencing" (efectos de resolución de amplitud)

la distribución de las líneas espectrales puede crear la impresión de que no existen lóbulos (eliminando el efecto de ventanas) o dificultad la obtención de valores máximos (i.e. ¿cuándo cae una línea espectral justo en el máximo o en el lugar deseado?)

si recordamos que $X(K) = X_0(\omega = 2\pi K/N)$ siempre que

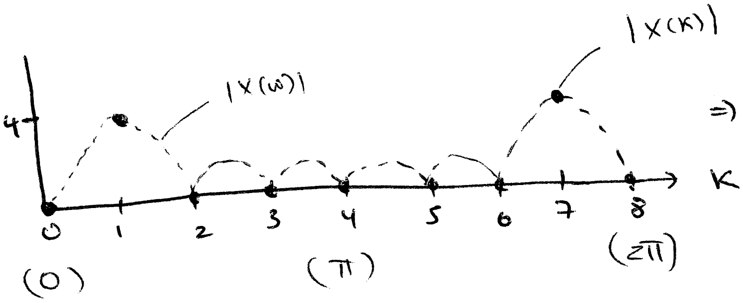
$x(n) = \sum_m x_0[n + mN]$ ⇒ $x(n)$ es una réplica

y $x_0(n) \neq 0$ sólo entre $0 \le n \le N-1$

i) si la réplica genera una señal con transiciones suaves esto implica que $\omega_0 = 2\pi K_0 / N$ (señal $x(n) = \cos(\omega_0 n)$)

ejemplo

$\left.\begin{matrix} K_0 = 1 \\ N = 8 \end{matrix}\right\} \omega_0 = \frac{\pi}{4}$



$\Rightarrow X(K) = \frac{N}{2}\left(\delta(K-K_0) + \delta(K-K_0)\right)$

OBS) las muestras coinciden justo con ceros de los lóbulos laterales y $|X(K)|$ se mejor de lo que debería.

- esto suele suceder con señales periódicas con un tamaño de ventana (N) asociado al periodo de la señal

ii) Si la replica no es suave, es decir si N no corresponde a una fracción del periodo, i.e.

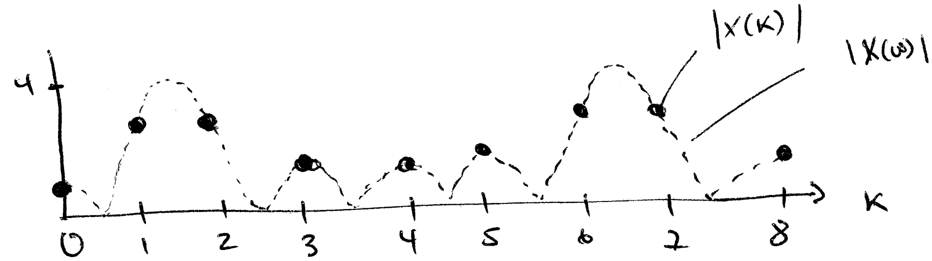
$$W_0 = 2\pi K_0/N + \pi/N$$

ejemplo

$K=1$

$N=8$

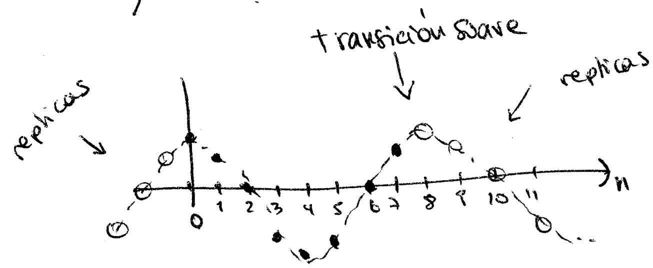
$W_0 = \frac{3\pi}{8}$



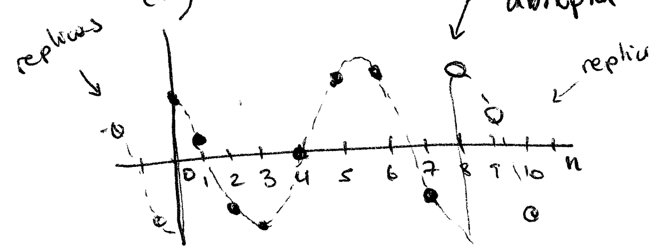
la amplitud máxima no es capturada por |X(K)| (picket Fence effect)
y los lobulos laterales se capturan al máximo

OBS) REPLICAS (elección de N vs w_0)

i)



ii)

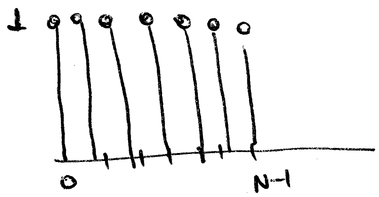


¿Cómo corregir esto? 1) Incrementar N produce más muestras, lo que mejor aproxima a $|X(\omega)|$ 2) Usar ventanas distintas a la cuadrada reduce los lobulos laterales y reduce discontinuidades (aunque generan un lobulo principal más ancho),
3) elegir un tamaño de ventana que sea una fracción o múltiplo del periodo de la señal (muy difícil saber esto "a priori")

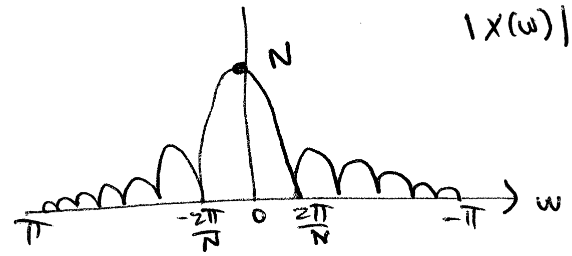
3) La amplitud puede ser incorrectamente interpretada

- Una señal finita con un largo mayor tendrá mayor amplitud, por ejemplo

$x(n)$



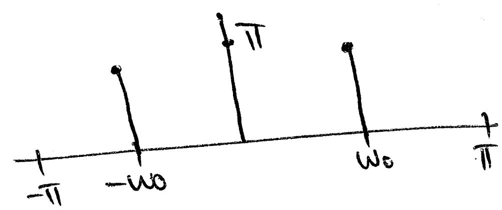
$\xleftrightarrow{DTFT}$



$$|X(\omega)| = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$\cos(\omega_0 n) \xleftrightarrow{DTFT}$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)$$



$$X(\omega) = \pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$$

Es posible normalizar por el largo para hacer que la DFT se parezca más a una DTFT sin el efecto de ventana y facilitar su interpretación.

Si no hay ventana (ventana cuadrada), normalizar por N $\quad \tilde{X}(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{N}$

Si se usa alguna ventana, normalizar por la suma de sus coeficientes $\quad \hat{X}(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{\mathrm{sum}(w(n))}$

4) El tamaño de N puede producir mejor o peor resolución

- Si N = L ⇒ reconstrucción perfecta (suficientemente bueno el DFT)
- Si N > largo de la señal (L)

  se agregan ceros al final de la señal (zero-padding), lo que permite tener mejor resolución espectral

  (ojo: Esto no cambia el espectro ni permite obtener información adicional, solo se ve mejor el espectro ya que hay más líneas espectrales)

  (IDFT)

  Al invertir este caso se obtienen los ceros al final

- Si N < L : sólo se procesan los N primeros datos y se produce aliasing temporal (se pierden los otros datos al invertir la DFT)