Flujo Máximo

Agustín J. González

ELO320: Estructura de Datos y Algoritmos

1er. Sem. 2002

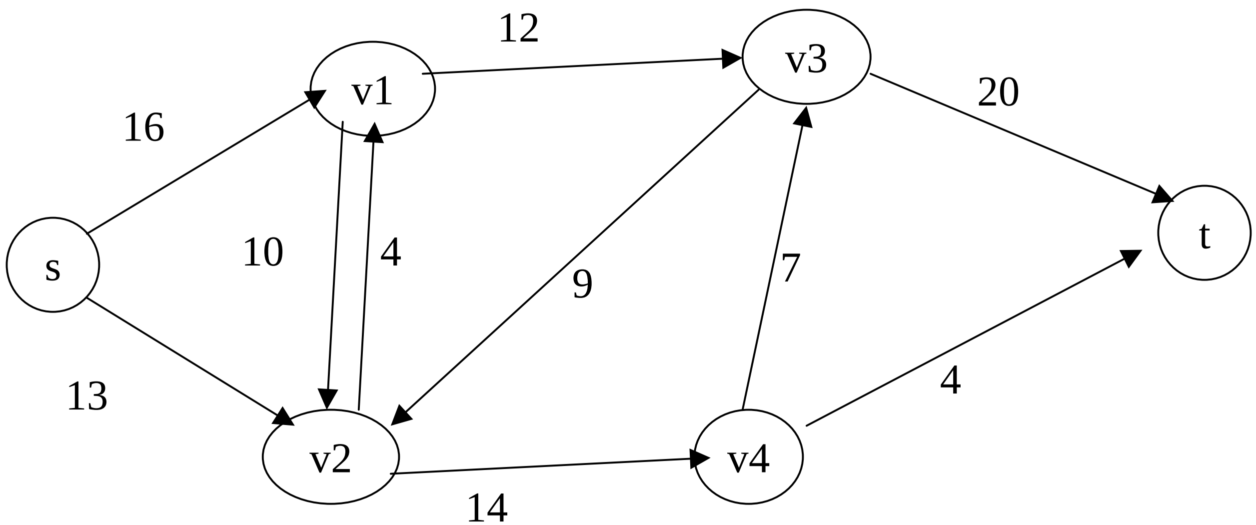
Introducción

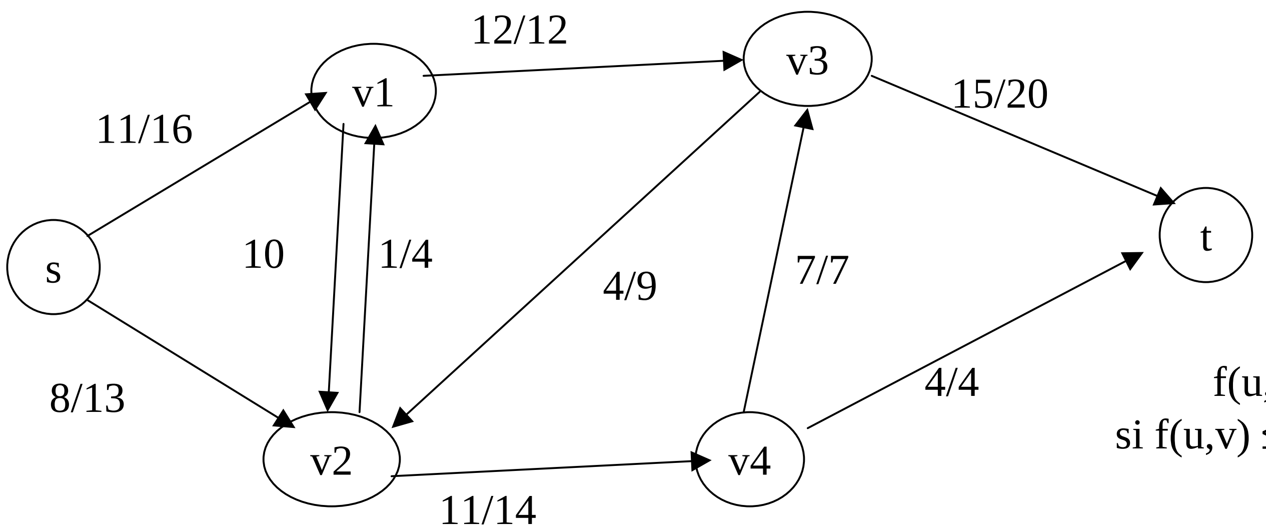
- Así como modelamos los enlaces de una red y sus nodos como un grafo dirigido, podemos interpretar el grafo como una red de flujo de algún material.
- Una fuente produce material en forma estacionaria y un resumidero lo consume.
- Cada arco puede ser considerado como un conducto de cierta capacidad.
- Como con la ley de corrientes de Kirchhoff, la suma de flujos entrantes a un vértice debe ser igual a la saliendo del vértice.
- Problema de flujo máximo: Cual es la tasa mayor a la cual el material puede ser transportado de la fuente al resumidero sin violar ninguna restricción de capacidad?

Redes de flujo

- Una red de flujo es un grafo dirigido G=(V,E) en donde cada arco $(u,v)\in E$ tiene una capacidad no negativa $c(u,v)\geq 0$.
- Se distinguen dos vértices: la ***fuente*** s y el ***resumidero*** t.
- Se asume que cada vértice se encuentra en alguna ruta de s a t.
- Un flujo en G es una función ***f***: VxV----> **R** tal que
  - Restricción de capacidad: $\forall$ u,v en V, $f(u,v) \leq c(u,v)$
  - Simetría: $f(u,v) = - f(v,u)$
  - Conservación: $\forall$ u en V-{s,t} $\sum_{v \text{ en } V} f(u,v) = 0$
- El valor del flujo es $|f| = \sum_{v \text{ en } V} f(s,v)$
- El problema del flujo máximo trata de maximizar este flujo.

Ejemplo

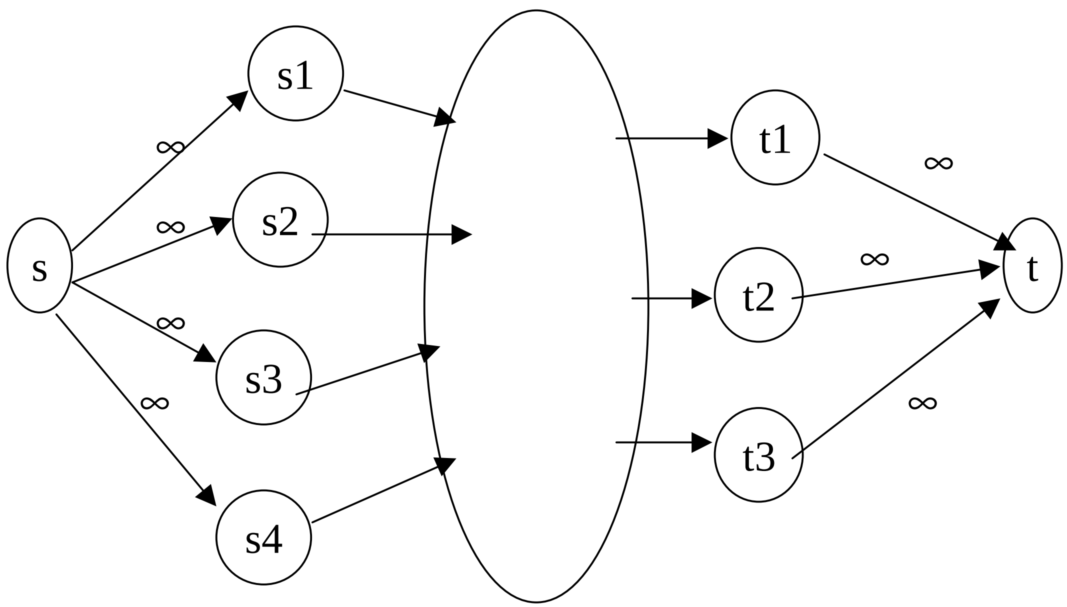




f(u,v)/c(u,v)
si f(u,v) $\leq$ 0 no se anota

Múltiples fuentes y resumideros

- Si hay múltiples fuentes y resumideros, el problema se puede reducir al caso simple previo de una fuente y un resumidero.
- Supongamos que se tiene {s1,s2,s3,..sm} fabricas y {t1,t2,t3,..,tn} puntos de venta.



Método de Ford-Fulkerson

- Este método depende de tres ideas importantes: Camino de aumento y red residual.
- Este método es iterativo. Se comienza con $f(u,v) = 0$ para cada par de nodos.
- En cada iteración se incrementa el valor del flujo buscando un ***camino de aumento***, el cual es un camino desde la fuente al resumidero que puede conducir mas flujo.

```
Ford-Kulkerson_method(G,s,t)
    inicializar flujo f a 0;
    while (existe un camino de aumento p) do
            aumentar el flujo f a lo largo de p;
    return f;
```

- Se repite el proceso previo hasta no encontrar un camino de aumento.
- ***Capacidad residual***: es la capacidad adicional de flujo que un arco puede llevar: $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$
- Dado una red de flujo $G=(v,E)$ y un flujo f, la ***red residual***: inducida por f es
  $G_f=(V,E_f)$, con $E_f=\{(u,v) \in VxV: c_f(u,v)>0\}$

Ejemplo: Red residual / camino de aumento

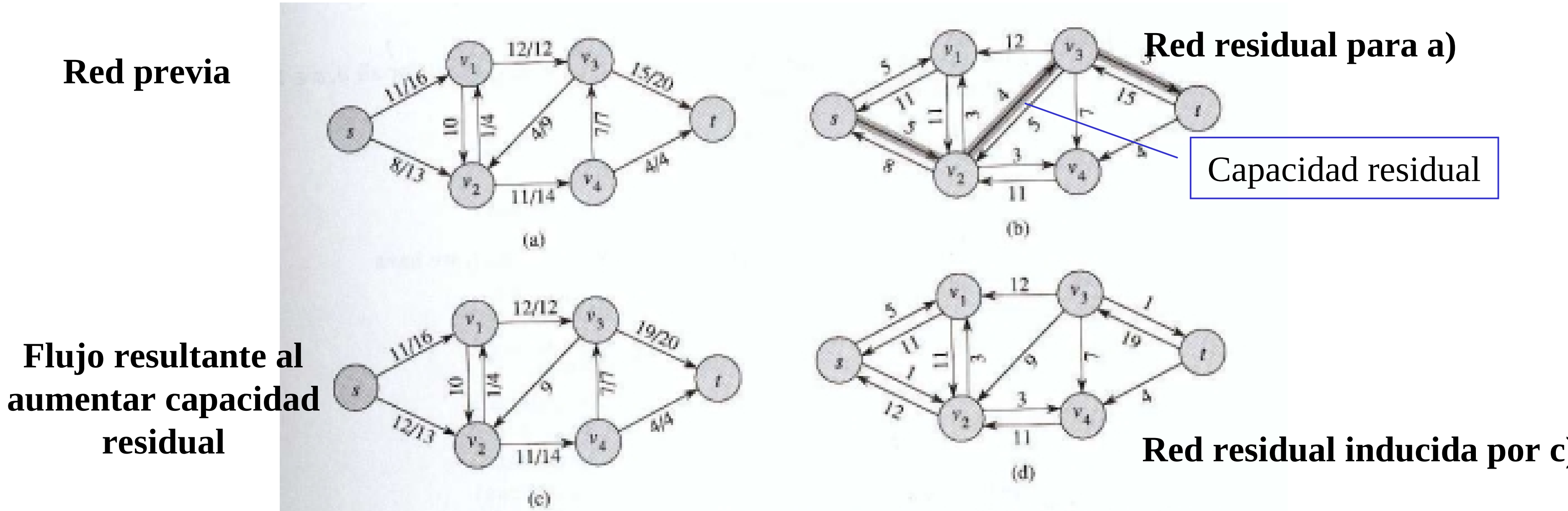
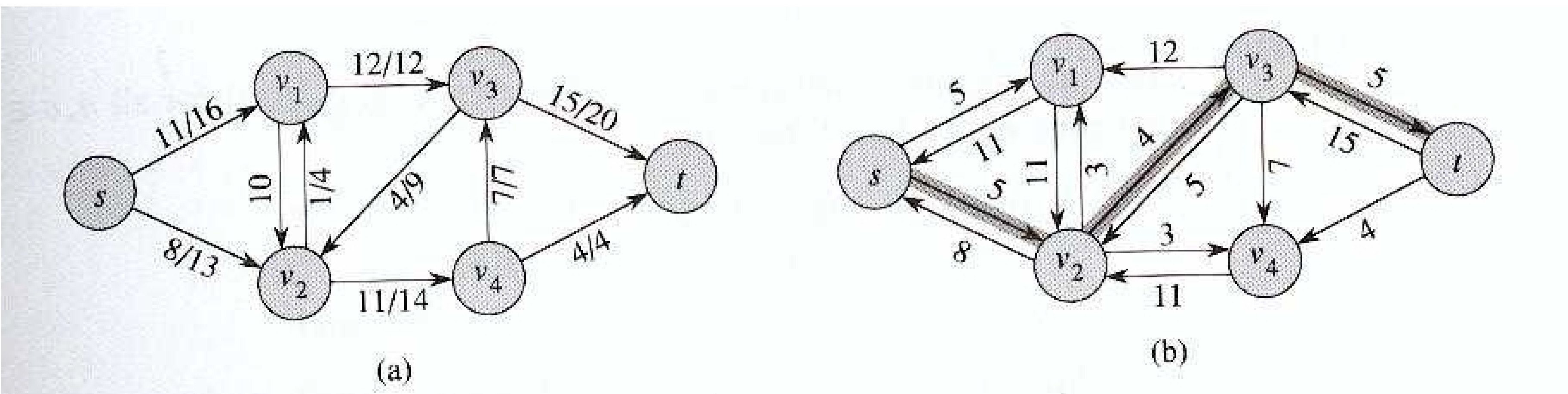


Figure 27.4 **(a)** The flow network G and flow f of Figure 27.1(b). **(b)** The residual network G_f with augmenting path p shaded; its residual capacity is $c_f(p) = c(v_2, v_3) = 4$. **(c)** The flow in G that results from augmenting along path p by its residual capacity 4. **(d)** The residual network induced by the flow in (c).

- Capacidad residual: es la capacidad adicional de flujo que un arco puede llevar: $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$
- Dado una red de flujo $G=(v,E)$ y un flujo f, la ***red residual***: inducida por f es
  $G_f=(V,E_f)$, con $E_f=\{(u,v) \in VxV: c_f(u,v)>0\}$

Camino de aumento

- Es un camino de aumento ***p*** es un camino simple de s a t en el grafo residual G_f
- Por definición de red residual, cada arco (u,v) sobre el camino aumentado admite algún flujo neto positivo desde u a v sin violar la restricción de capacidad.
- El flujo adicional máximo está dado por:
  $c_f(p)= \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ está sobre } p\}$



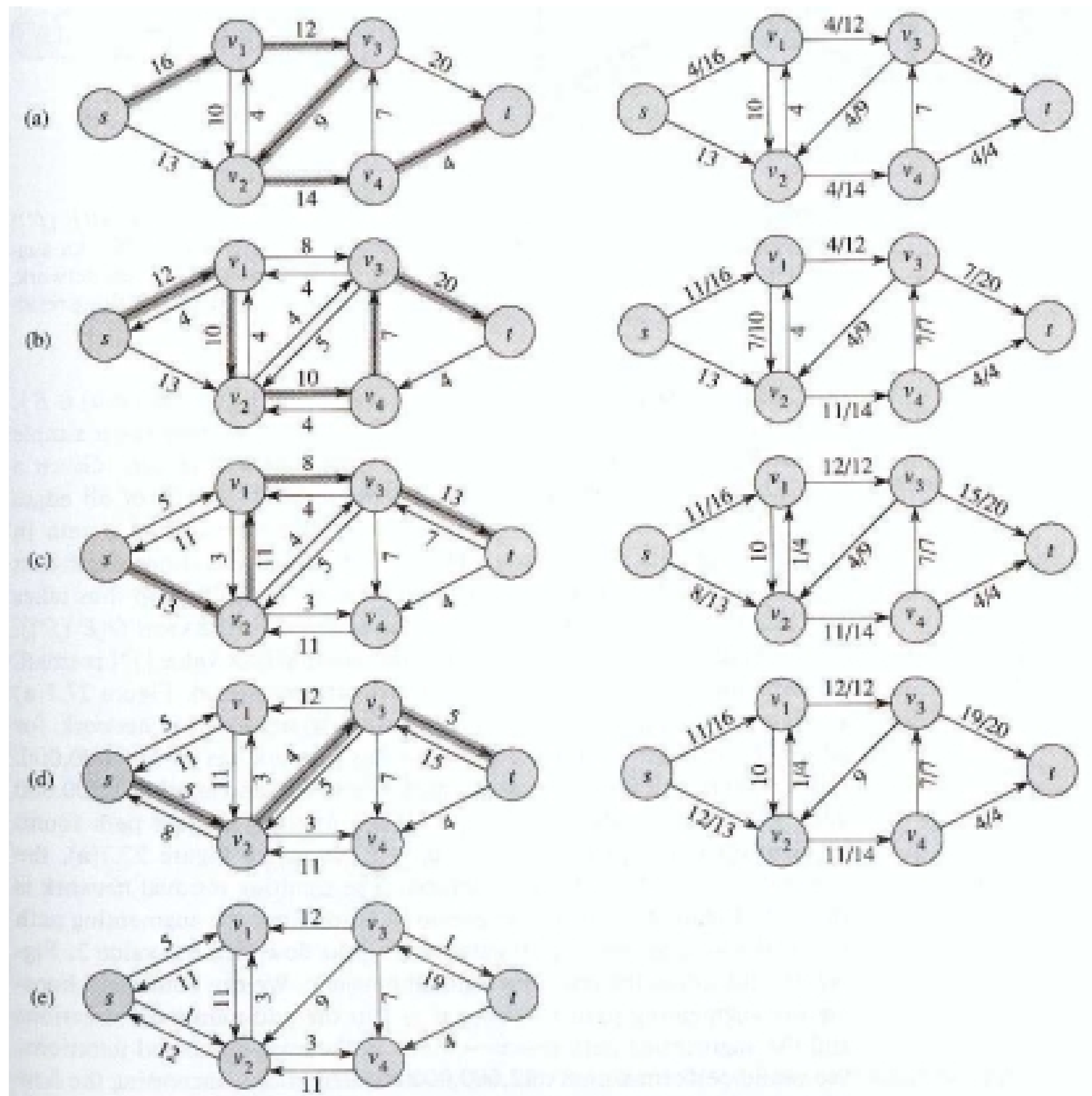
Algoritmo básico Ford-Fulkerson

- Ford-Fulkerson(G,s,t){

```
Ford-Fulkerson(G,s,t){
    for (cada arco (u,v) de E) {
        f[u,v]= 0;
        f[v,u]= 0;
    }
    while (exista un camino p desde s at en la red residual G_f) {
        c_f(p) = min{c_f(u,v) : (u,v) está sobre p};
        for (cada arco (u,v) en p) {
            f[u,v]= f[u,v] + c_f(p) ;
            f[v,u]= - f[u,v];
        }
    }
}
```

Ejemplo: Algoritmo básico Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G,s,t){
    for (cada arco (u,v) de E) {
        f[u,v]= 0;
        f[v,u]= 0;
    }
    while (exista un camino p desde s at en la red residual G_f)
    {
        $c_f(p)$ = min{$c_f(u,v)$: (u,v) está sobre p};
        for (cada arco (u,v) en p) {
            f[u,v]= f[u,v] + $c_f(p)$;
            f[v,u]= - f[u,v];
        }
    }
}



a) a d) son las iteraciones del loop while.
Lado izquierdo están las redes residuales con al camino de aumento
A la derecha las red resultante al agregar el flujo f_p
La última red residual no tiene camino de aumento, luego la red de la cual se induce es de flujo máximo

Análisis de Ford-Fulkerson

- Si el camino de aumento es elegido usando breadth-first search (o búsqueda por niveles o amplitud), el algoritmo corre en tiempo polinomial.
- En este caso el método de Ford-Fulkerson es conocido como algoritmo de Edmonds-Karp.
- El algoritmo tiene un costo inicial O(E)
- El cuerpo del loop toma un tiempo O(E) dado que en el ciclo for se procesa cada arco del camino de aumento.
- Luego se puede demostrar que el numero de aumentos de flujo esta acotado por O(VE).
- Esta cota es obtenida considerando que al aumentar el flujo al menos un arco del camino de aumento desaparece (el que tenia capacidad residual mínima. La eliminación de arcos hace aumentar la distancia desde el nodo de partida. El mismo arco podría reaparecer posteriormente, pero con distancia aun mayor de la fuente. Así el numero de veces que un arco pude aparecer esta acotado por el numero de nodos -2 (distancia máxima posible). Como hay E arcos, el numero total de caminos de aumentos es O(VE).
- Así el costo del algoritmo es $O(VE^2)$
- Hay otros algoritmos que obtienen $O(V^2E)$ y otro $O(V^3)$.

Asociación bipartita máxima

- Dado un grafo no dirigido $G=(V,E)$, una asociación es un subconjunto de arcos $M \subseteq E$ tal que para cada vértice v de V, a lo mas un arco de M es incidente sobre v.
- La máxima asociación es la asociación de cardinalidad máxima.
- Restringiremos el problema a encontrar la asociación máxima en un grafo bipartito. En este se puede particionar V en $V=L \cup R$, donde L y R son disjuntos y todos los arcos de E están entre L y R.
- L pueden ser maquinas y R tareas y se desea asociarlas para desarrollarlas en paralelo.

Búsqueda de la Asociación bipartita máxima

- Es posible usar el método de Ford-Fulkerson.
- El turco es construir la red de flujo G'=(V',E') para el grafo bipartito G=(V,E).
- $V' = V \cup \{s,t\}$
- $E' = \{(s,u) : u \in E\} \cup$
  $\{ (u,v): u \in L , v \in R, \text{y } (u,v) \in E \} \cup$
  $\{(v,t): v \in R\}$
- Se asigna capacidad unitaria a cada arco de E'
- Se aplica así el método Ford-Fulkerson y se obtiene la asociación máxima.