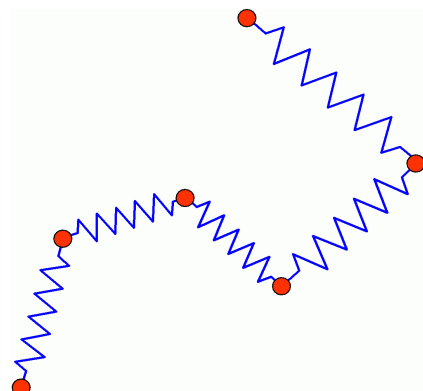


Sistemas Lineales de Masas-Resortes 2D

José Cortés Parejo. Noviembre 2007

Un Sistema Lineal de Masas-Resortes está constituido por una **sucesión de puntos** (de ahí lo de *lineal*) unidos cada uno con el siguiente por un resorte (muelle) y donde se supone que cada punto posee una cierta masa.

Si a cada punto se le asigna una posición y velocidad iniciales (lo que implica que cada resorte estará estirado o contraído), el problema consiste en determinar la posición de cada punto/masa a lo largo del tiempo teniendo en cuenta la acción de las fuerzas debidas a los resortes.



1. Dinámica de un resorte

En un resorte simple uniendo a 2 masas, la fuerza que actúa sobre cada una de ellas es proporcional a la elongación del resorte respecto a su estado sin tensión y dirigida hacia la otra masa si el resorte está estirado y en sentido opuesto si está contraído:

$$F_{ij} = k(L - L_0) \frac{P_j - P_i}{\|P_j - P_i\|} \quad (1.1) \quad (\text{Ley de Hooke})$$

donde F_{ij} representa a la fuerza sobre la masa i debida a la masa j (a causa del resorte que une a ambas).

La constante de rigidez (*stiffness*) k es propia de cada resorte.

Dado que $L = \|P_j - P_i\|$, esta ecuación puede escribirse:

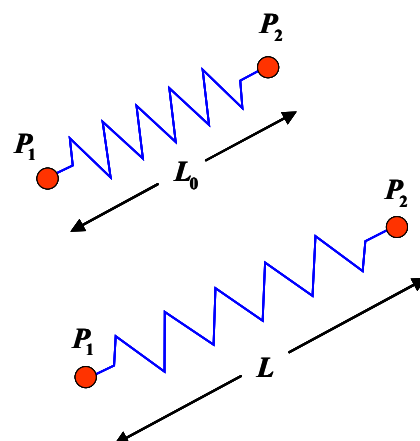
$$F_{ij} = k \left(\|P_j - P_i\| - L_0 \right) \frac{P_j - P_i}{\|P_j - P_i\|} = k \left(1 - \frac{L_0}{\|P_j - P_i\|} \right) (P_j - P_i) \quad (1.2)$$

Se tiene, por la 2ª Ley de Newton: $F = m \cdot a$, siendo m la masa de la partícula y a su aceleración. Dado que, por otra parte, la aceleración de una partícula es la derivada segunda de su posición en el tiempo, la ecuación (1.2) queda:

$$m_i \cdot P_i'' = k \left(1 - \frac{L_0}{\|P_j - P_i\|} \right) (P_j - P_i) \quad (1.3)$$

que es una ecuación diferencial de 2º orden en la que P_i y P_j son funciones del tiempo.

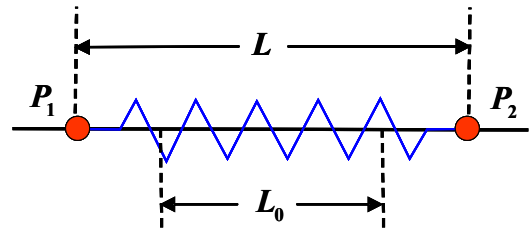
Nótese que para la partícula i , la ecuación de su movimiento también depende, obviamente, de la posición de la partícula j y recíprocamente; por lo que el análisis del sistema requiere en realidad la resolución simultánea de un sistema de 2 ecuaciones diferenciales de 2º orden.



1.1 Resolución exacta del Sistema

Para este caso tan simple, en el que sólo se considera un resorte, podemos suponer sin perder generalidad que ambas partículas se encuentran sobre el eje X.

$$m_i \cdot x_i'' = k \left(1 - \frac{L_0}{\|x_j - x_i\|} \right) (x_j - x_i)$$



Si además hacemos $m_1 = m_2 = m$ para simplificar:

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{L_0}{\|x_2 - x_1\|} \right) (x_2 - x_1) \\ x_2'' = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{L_0}{\|x_2 - x_1\|} \right) (x_1 - x_2) \end{cases} \quad (1.4)$$

Llamando P_1 a la partícula con menor abscisa y P_2 a la de mayor abscisa (esta posición relativa es invariable en el tiempo), se tiene $x_2 - x_1 > 0$ por lo que (1.4) se reduce a:

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{k}{m} [(x_2 - x_1) - L_0] \\ x_2'' = \frac{k}{m} [(x_1 - x_2) + L_0] \end{cases} \quad (1.5)$$

de donde inmediatamente sigue $x_1'' + x_2'' = 0$ y de aquí, integrando 2 veces: $x_1(t) + x_2(t) = at + b$

Las constantes a y b se determinan a partir de la posición y velocidad inicial de cada partícula (lo cual son datos del problema):

$$\begin{aligned} x_1(0) + x_2(0) &= b \\ x_1'(0) + x_2'(0) &= a \end{aligned}$$

Por lo que: $x_1(t) + x_2(t) = [x_1'(0) + x_2'(0)]t + [x_1(0) + x_2(0)]$

Para simplificar el problema y comprender mejor el movimiento, es útil considerar que las partículas están inicialmente situadas simétricamente respecto al origen: $x_2(0) = -x_1(0)$ y que sus velocidades iniciales son nulas, esto es $x_1'(0) = x_2'(0) = 0$, con lo que tenemos:

$$x_1(t) + x_2(t) = 0 \quad \text{y de aquí:} \quad \boxed{x_2(t) = -x_1(t) \quad \forall t} \quad (1.6)$$

Y podemos sustituir en la primera de las ecuaciones en (1.5):

$$\boxed{x_1''(t) = \frac{k}{m} [-2x_1(t) - L_0]} \quad \text{o bien:} \quad \boxed{m x_1''(t) + 2k x_1(t) = -kL_0} \quad (1.7)$$

con lo que hemos reducido el Sistema a una única ecuación diferencial en la función $x_1(t)$.

Una vez resuelta para $x_1(t)$ obtenemos inmediatamente el movimiento para $x_2(t) = -x_1(t)$

Esta ecuación diferencial lineal de 2º orden tiene infinitas soluciones dependientes de 2 parámetros y es inmediato comprobar que estas soluciones son de la forma:

$$x_1(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) - \frac{1}{2} L_0 \quad \text{donde } \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

y los parámetros A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales $x_1(0)$ y $x'_1(0) = 0$:

$$A = \frac{x'_1(0)}{\omega} = 0 \quad B = x_1(0) + \frac{1}{2} L_0$$

quedando finalmente:

$$x_1(t) = [x_1(0) + \frac{1}{2} L_0] \cos(\omega t) - \frac{1}{2} L_0$$

Con lo que las ecuaciones del movimiento para este sistema elemental son:

$$\begin{cases} x_1(t) = [x_1(0) + \frac{1}{2} L_0] \cos(\omega t) - \frac{1}{2} L_0 \\ x_2(t) = -x_1(t) \end{cases} \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (1.8)$$

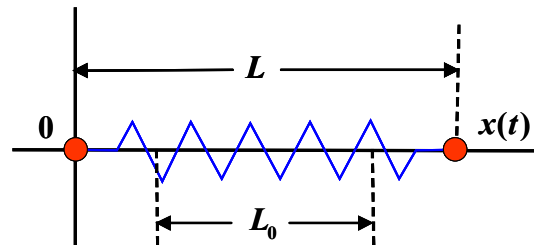
1.2 Restricción en un extremo

Es interesante considerar el caso en el que una de las partículas permanece fija debido a que está físicamente “atada” a una posición y es la otra partícula la que se mueve por acción del resorte. La ley de Hooke (1.1) sólo es aplicable evidentemente a esta segunda partícula:

$$F_{21} = k(L - L_0) \frac{P_1 - P_2}{\|P_1 - P_2\|}$$

Poniendo $P_1(t) = (0, 0) \forall t$ y $P_2(t) = (x(t), 0)$:

$$F = k(L - L_0) \frac{-x(t)}{|x(t)|} \quad (1.9)$$



Podemos suponer $x(0) > 0$ con lo que siempre será $x(t) > 0$ y (1.9) queda:

$$F = -k(L - L_0) = -k[x(t) - L_0]$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en el apartado anterior:

$$m \cdot x''(t) = -k[x(t) - L_0] \quad \Rightarrow \quad m \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = kL_0 \quad (1.10)$$

Ecuación diferencial cuya solución es: $x(t) = \frac{x'(0)}{\omega} \sin(\omega t) + [x(0) - L_0] \cos(\omega t) + L_0$

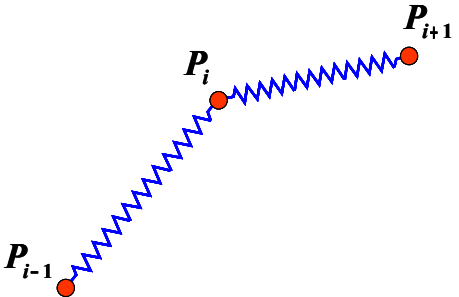
Como antes, si suponemos $x'(0) = 0$:

$$x(t) = [x(0) - L_0] \cos(\omega t) + L_0 \quad (1.11)$$

2. Sistema Lineal de masas-resortes

El caso de un resorte conectando 2 masas es el único que puede resolverse analíticamente, por lo pasaremos al estudio del caso general de n resortes conectando linealmente $n+1$ masas que, para simplificar, supondremos son iguales. Asimismo, supondremos que todos los resortes son idénticos, por lo que sus constantes k y L_0 son iguales.

Sean P_0, P_1, \dots, P_n puntos del plano representando las posiciones (en el tiempo) de las masas. La fuerza que actúa sobre la masa en P_i es, para $1 \leq i \leq n-1$ debida a la acción de los 2 resortes que la conectan respectivamente con P_{i-1} y P_{i+1} . Cada una de ellas puede expresarse como:

$$\begin{cases} F_{i,i-1} = k \left(1 - \frac{L_0}{\|P_{i-1} - P_i\|} \right) (P_{i-1} - P_i) \\ F_{i,i+1} = k \left(1 - \frac{L_0}{\|P_{i+1} - P_i\|} \right) (P_{i+1} - P_i) \end{cases} \quad (2.1)$$


Por tanto, la fuerza total actuando sobre la partícula i es:

$$F_i = F_{i,i-1} + F_{i,i+1} = k \left(1 - \frac{L_0}{\|P_{i-1} - P_i\|} \right) (P_{i-1} - P_i) + k \left(1 - \frac{L_0}{\|P_{i+1} - P_i\|} \right) (P_{i+1} - P_i) \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Con lo que, por la 2ª Ley de Newton $F_i = m \cdot a_i = m \cdot P_i''$:

$$P_i'' = \frac{k}{m} \left[\left(1 - \frac{L_0}{\|P_{i-1} - P_i\|} \right) (P_{i-1} - P_i) + \left(1 - \frac{L_0}{\|P_{i+1} - P_i\|} \right) (P_{i+1} - P_i) \right] \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (2.2)$$

que representan las ecuaciones del movimiento para las **partículas interiores**.

Las 2 partículas en los extremos sólo están sujetas a la fuerza de un resorte. Entonces, por (2.1):

$$F_{01} = k \left(1 - \frac{L_0}{\|P_1 - P_0\|} \right) (P_1 - P_0) \quad \Rightarrow \quad P_0'' = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{L_0}{\|P_1 - P_0\|} \right) (P_1 - P_0) \quad (2.3a)$$

$$F_{n,n-1} = k \left(1 - \frac{L_0}{\|P_{n-1} - P_n\|} \right) (P_{n-1} - P_n) \quad \Rightarrow \quad P_n'' = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{L_0}{\|P_{n-1} - P_n\|} \right) (P_{n-1} - P_n) \quad (2.3b)$$

Las expresiones (2.2), (2.3a) y (2.3b) constituyen un Sistema de $n+1$ ecuaciones diferenciales en las $n+1$ funciones incógnitas $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$ que, para quedar totalmente determinado necesita las posiciones y velocidades iniciales $P_0(0), P_1(0), \dots, P_n(0)$ y $P'_0(0), P'_1(0), \dots, P'_n(0)$.

2.1 Resolución del Sistema por el Método de Euler

Dado que el Sistema de Ecuaciones Diferenciales que describe la evolución de la cadena de partículas a lo largo del tiempo es imposible de resolver exactamente, usaremos un método iterado para calcular la posición de cada partícula en instantes $t_0, t_1, t_2 \dots$ con $t_0 = 0$ y $t_{k+1} - t_k = \Delta t$ constante.

El más sencillo de los métodos es el de Euler, que esencialmente se basa en aproximar la derivada de una función $f(t)$ en un punto mediante un cociente incremental:

$$f'(t_k) \approx \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$$

la cual puede ser una buena aproximación si $t_{k+1} - t_k$ es suficientemente pequeño dado que, por la definición de derivada:

$$f'(t_k) = \lim_{t_{k+1} \rightarrow t_k} \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$$

Para cada partícula $P_i(t)$ podemos escribir: $P_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ con lo cual:

$$\begin{cases} x'_i(t_k) \approx \frac{x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)}{\Delta t} \\ y'_i(t_k) \approx \frac{y_i(t_{k+1}) - y_i(t_k)}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow P'_i(t_k) \approx \frac{1}{\Delta t} [P_i(t_{k+1}) - P_i(t_k)]$$

Análogamente, dado que $P''_i(t)$ es la derivada de $P'_i(t)$: $P''_i(t_k) \approx \frac{1}{\Delta t} [P'_i(t_{k+1}) - P'_i(t_k)]$

Estas aproximaciones podemos escribirlas como:

$$P_i(t_{k+1}) \approx P_i(t_k) + \Delta t \cdot P'_i(t_k) \quad (2.4)$$

$$P'_i(t_{k+1}) \approx P'_i(t_k) + \Delta t \cdot P''_i(t_k) \quad (2.5)$$

La primera expresión permite obtener recurrentemente las posiciones $P_0(t_{k+1}), P_1(t_{k+1}), \dots, P_n(t_{k+1})$ de cada partícula en el instante t_{k+1} en función de las posiciones en el instante anterior t_k supuesto se conocen las velocidades $P'_0(t_k), P'_1(t_k), \dots, P'_n(t_k)$.

Esto es cierto para el instante t_1 dado que tanto las posiciones iniciales $P_0(t_0), P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)$ como las velocidades iniciales $P'_0(t_0), P'_1(t_0), \dots, P'_n(t_0)$ son datos del problema.

En cambio, para $k = 1, 2, \dots$ no son conocidas $P'_0(t_k), P'_1(t_k), \dots, P'_n(t_k)$, por lo que hay que actualizarlas mediante (2.5) escrita en la forma $P'_i(t_k) \approx P'_i(t_{k-1}) + \Delta t \cdot P''_i(t_{k-1})$ ($k \geq 1$), donde las derivadas segundas $P''_i(t_{k-1})$ se calculan **exactamente** a través de las ecuaciones del movimiento del Sistema (2.2), (2.3a) y (2.3b).

El esquema anterior permite diseñar un algoritmo recurrente para la resolución de las ecuaciones que esbozamos en el siguiente apartado.

2.2 Implementación del Método de Euler

Si consideramos una sucesión de instantes de tiempo $t_0, t_1, t_2 \dots t_p$ con $t_0 = 0$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ y los datos del problema son las posiciones y velocidades iniciales de cada partícula:

$$\begin{cases} P_0(t_0), P_1(t_0), \dots P_n(t_0) \\ P'_0(t_0), P'_1(t_0), \dots P'_n(t_0) \end{cases}$$

Proceder según el esquema:

1. Calcular $P_0(t_1), P_1(t_1) \dots P_n(t_1)$ con la expresión $P_i(t_1) \approx P_i(t_0) + \Delta t \cdot P'_i(t_0)$

2. Para $k = 1, 2 \dots p$

[Actualización de las derivadas mediante $P'_i(t_k) \approx P'_i(t_{k-1}) + \Delta t \cdot P''_i(t_{k-1})$]

• Calcular $P''_0(t_{k-1}), P''_1(t_{k-1}) \dots P''_n(t_{k-1})$ por las ecuaciones (2.2), (2.3a) y (2.3b)

• Calcular $P'_0(t_k), P'_1(t_k), \dots P'_n(t_k)$ por $P'_i(t_k) \approx P'_i(t_{k-1}) + \Delta t \cdot P''_i(t_{k-1})$

[En este momento se conocen $P_0(t_k), P_1(t_k) \dots P_n(t_k)$ y $P'_0(t_k), P'_1(t_k), \dots P'_n(t_k)$]

• Calcular $P_0(t_{k+1}), P_1(t_{k+1}), \dots P_n(t_{k+1})$ mediante $P_i(t_{k+1}) \approx P_i(t_k) + \Delta t \cdot P'_i(t_k)$

Fin del bucle