Simulación del Movimiento de una Masa Sometida a una Fuerza Externa

Sea una masa M , constante, sometida a una fuerza neta $\vec{f}$ no necesariamente constante. Tenemos:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\vec{a}=\frac{\vec{f}}{M}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{j}=\frac{d\vec{a}}{dt}, \quad (Jerk)$$

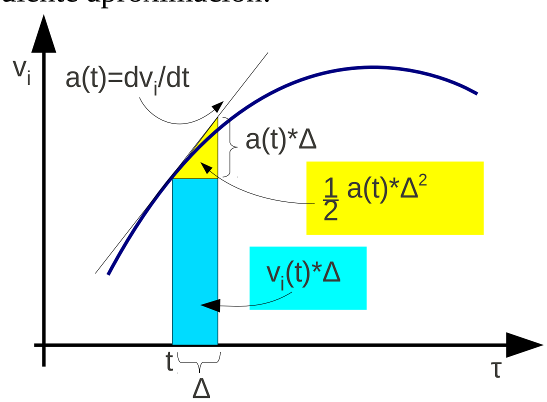
Luego podemos calcular:

$$\vec{x}(t+\Delta)-\vec{x}(t)=\int_t^{t+\Delta}\vec{v}(\tau)d\tau$$

$$\vec{v}(t+\Delta)-\vec{v}(t)=\int_t^{t+\Delta}\vec{a}(\tau)d\tau$$

$$\vec{j}(t)=\frac{d\vec{a}}{dt}$$

Sabemos que el valor de una integral definida corresponde al área bajo la curva definida por el integrando entre los límites de la integral. Así, para valores pequeños de Δ , podemos estimar la integral definida usando la siguiente aproximación:



$$\vec{x}(t+\Delta)-\vec{x}(t)=\left(\int_t^{t+\Delta}\vec{v}(\tau)d\tau\right)\approx\vec{v}(t)*\Delta+\frac{1}{2}\vec{a}(t)*\Delta^2$$

Análogamente:

$$\vec{v}(t+\Delta)-\vec{v}(t)=\left(\int_t^{t+\Delta}\vec{a}(\tau)d\tau\right)\approx\vec{a}(t)*\Delta+\frac{1}{2}\frac{d\vec{a}}{dt}(t)*\Delta^2=\vec{a}(t)*\Delta+\frac{1}{2}\vec{j}(t)*\Delta^2$$

Como no disponemos de $\vec{j}(t)$ lo aproximaremos a partir de los valores de $\vec{a}(t)$ y $\vec{a}(t-\Delta)$, así:

$$\vec{v}(t+\Delta)-\vec{v}(t)\approx\vec{a}(t)*\Delta+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t-\Delta)}{\Delta}\right)*\Delta^2=\vec{a}(t)*\Delta+\frac{1}{2}\left(\vec{a}(t)-\vec{a}(t-\Delta)\right)*\Delta$$

Así podemos hacer nuestra simulación usando:

$$\vec{a}(t)=\frac{1}{M}\vec{f}(t)$$

$$\vec{v}(t+\Delta)\approx\vec{v}(t)+\vec{a}(t)*\Delta+\frac{1}{2}\left(\vec{a}(t)-\vec{a}(t-\Delta)\right)*\Delta=\vec{v}(t)+\frac{1}{2}\left(3\vec{a}(t)-\vec{a}(t-\Delta)\right)*\Delta$$

$$\vec{x}(t+\Delta)\approx\vec{x}(t)+\vec{v}(t)*\Delta+\frac{1}{2}\vec{a}(t)*\Delta^2$$

Un acercamiento más matemático para el cálculo de $\vec{x}(\tau+\Delta)$ fue aportado por el profesor Jaime Glaría en Junio 2010.
Sea x una función continua de t.
Obedeciendo a Brook Taylor (1685-1731) y Colin Maclaurin (1698-1746):

$$x(\tau+\Delta)\approx x(\tau)+\frac{dx}{dt}(\tau)*\Delta+\frac{1}{2}*\frac{d^2x}{dt^2}(\tau)*\Delta^2+\ldots+\frac{1}{m!}*\frac{d^mx}{dt^m}(\tau)*\Delta^m \qquad (1)$$

En la medida que m crece la aproximación se mejora.
Luego en nuestro caso:

$$\vec{x}(\tau+\Delta)\approx\vec{x}(\tau)+\vec{v}(\tau)*\Delta+\frac{1}{2}*\vec{a}(\tau)*\Delta^2+\frac{1}{6}*\vec{j}(\tau)*\Delta^3$$

Usando la aproximación para $\vec{j}$, tenemos finalmente:

$$\vec{a}(\tau)=\frac{1}{M}\vec{f}(\tau)$$

$$\vec{v}(\tau+\Delta)\approx\vec{v}(\tau)+\frac{1}{2}\left(3\vec{a}(\tau)-\vec{a}(\tau-\Delta)\right)*\Delta$$

$$\vec{x}(\tau+\Delta)\approx\vec{x}(\tau)+\vec{v}(\tau)*\Delta+\frac{1}{6}*\left(4\vec{a}(\tau)-\vec{a}(\tau-\Delta)\right)*\Delta^2$$

Es así como a partir de la aceleración podemos estimar los valores de velocidad y posición si conocemos la velocidad y posición inicial.
En pseudo lenguaje esto es:
/* condiciones iniciales */

$t=0$
$\vec{x}=\vec{x}(0)$
$\vec{v}=\vec{v}(0)$
$\vec{a}=\dfrac{\vec{f}(0)}{M}$

while (1) {

$\vec{a_{-\Delta}}=\vec{a}$

$\vec{a}=\frac{1}{M}\vec{f}$; /* aceleración actual, la fuerza actual considerando estado t para todo el sistema */

$\vec{v_{+\Delta}}\approx\vec{v}+\frac{1}{2}\left(3\vec{a}-\vec{a_{-\Delta}}\right)*\Delta$; /* estimación para velocidad futura */

$\vec{x_{+\Delta}}\approx\vec{x}+\vec{v}*\Delta+\frac{1}{6}*\left(4\vec{a}-\vec{a_{-\Delta}}\right)*\Delta^2$; /* estimación para próxima posición */

$t=t+\Delta$
$\vec{x}=\vec{x_{+\Delta}}$
$\vec{v}=\vec{v_{+\Delta}}$

…........... /* Aquí usamos los valores de posición y velocidad obtenidos */

}