Colisiones de Dos Objetos Rígidos

Agustín J. González

En nuestras simulaciones antes de aplicar cualquier modelo para una colisión debemos determinar cuándo dos objetos están colisionando. Para detectar esta situación debe cumplirse que ambos se topan y que además se aproximan el uno al otro. La segunda condición es necesaria en situaciones cuando los objetos se siguen tomando incluso después de haber reflejado la comisión en la trayectoria de los cuerpos. Luego supondremos que las colisiones son completamente elásticas; es decir, la energía cinética se conserva. Consideraremos los casos de colisiones de bola con pared y entre dos bolas. En ambos casos, primero debemos detectar la condición de choque y el efecto de éste en el movimiento de los cuerpos involucrados.

Colisión de Bola con Pared

Consideremos la colisión de una bola con una pared. En el caso de una pared vertical la situación podría sería similar a la Figura 1.

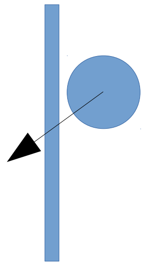

Figura 1: Colisión de bola con pared

Primero debemos determinar la condición de choque: Usando un método a posteriori (es decir, detectar la colisión después que se produjo), la condición de choque se detecta cuando el centro de la bola está a una distancia de la pared menor que su radio y la bola se está acercando a la pared. En el caso general esto se puede determinar analizando la Figura 2.

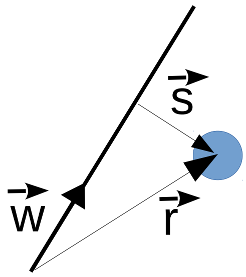

Figura 2 Referencias en colisión de bola con pared

$\vec{w}: Vector\ unitario\ en\ dirección\ de\ la\ pared$

$\vec{r}: Posición\ de\ la\ bola$

$\vec{s}: Posición\ de\ la\ bola\ respecto\ de\ la\ pared$

Usando el producto punto entre vectores podemos calcular el vector proyección de $\vec{r}$ en la pared y con éste determinar $\vec{s}$.

$(\vec{r}\cdot\vec{w})\vec{w}$ $es\ la\ proyección\ de\ \vec{r}\ sobre\ la\ pared, luego$

$$\vec{s}=\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{w})\vec{w}$$

Cuando la bola está tocando la pared se cumple:

$$\|\vec{s}\|<radio$$

$$\|\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{w})\vec{w}\|<radio$$

La condición de acercamiento se puede verificar haciendo el producto punto entre $\vec{s}$ y su rapidez de cambio:

$$\frac{d\|\vec{s}\|}{dt}<0 \Leftrightarrow \frac{d\|\vec{s}\|^2}{dt}<0 \Leftrightarrow d\frac{(s_x^2+s_y^2)}{dt}<0 \Leftrightarrow 2s_x\frac{ds_x}{dt}+2s_y\frac{ds_y}{dt}<0 \Leftrightarrow \vec{s}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt}<0$$

Observando la Figura 3, se puede apreciar que la rapidez de cambio de $\vec{s}$ es justamente $\vec{v_p}$, luego:

$$\vec{s}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt}<0 \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{v}-(\vec{r}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{w})<0$$

Para el caso de una pared vertical ubicada en el origen $\vec{w}=\hat{j}$, la condición para que la bola colisione con la pared es:

$$\|\vec{r}-r_y\hat{j}\|=\|r_x\hat{i}\|=|r_x|<radio,\quad si\,la\,pared\,vertical\,está\,en\,coordenada\,w_x,entonces\,la\,condición\,es:$$
$$|r_x-w_x|<radio \quad y$$
$$(\vec{r}-w_x\hat{i})\cdot\vec{v}-((\vec{r}-w_x\hat{i})\cdot\hat{j})(\vec{v}\,\hat{j})=(r_x-w_x)v_x+r_yv_y-r_yv_y=(r_x-w_x)v_x<0,$$
$$luego\,en\,este\,caso\,las\,dos\,condiciones\,son:$$
$$[|r_x-w_x|<radio]\ \wedge\ [(r_x-w_x)v_x<0]$$

Una vez determinada la condición de choque, la ley física para una colisión elástica invierte el sentido de la componente de la velocidad perpendicular a la pared. Siguiendo un desarrollo como el previo, se puede determinar la componente de la velocidad de la bola afectada por el choque.

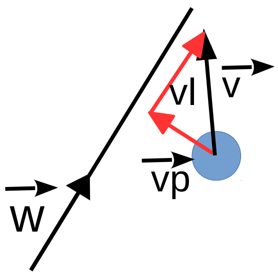

Figura 3: Descomposición de la velocidad de la bola antes de la colisión

$\vec{w}$: *Vector unitario en dirección de la pared*
$\vec{v}$: *Velocidad de la bola*
$\vec{v_p}$: *Componente perpendicular a la pared de* $\vec{v}$
$\vec{v_l}$: *Componente longitudinal a la pared de* $\vec{v}$

Con estas definiciones, la velocidad de la bola luego de una colisión elástica se puede determinar con el siguiente desarrollo. Previo a la colisión la velocidad se pueden descomponer como:

$$\vec{v_l}=(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{w}$$
$$\vec{v_p}=\vec{v}-\vec{v_l}=\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{w}$$

Luego, en colisión elástica, la velocidad para la bola después del choque es:

$$\vec{v_{after}}=\vec{v_l}-\vec{v_p}$$
$$\vec{v_{after}}=\vec{v_l}-\vec{v}+\vec{v_l}=2\vec{v_l}-\vec{v}=2(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{w}-\vec{v}$$

Para el caso de una pared vertical ubicada en el origen $\vec{w}=\hat{j}$, la velocidad de la bola posterior al choque sería:

$$\vec{v_{after}}=2(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{w}-\vec{v}=2v_y\hat{j}-\vec{v}=2v_y\hat{j}-(v_x\hat{i}+v_y\hat{j})=\ -v_x\hat{i}+v_y\hat{j}$$

Cabe destacar que las relaciones previas son igualmente válidas independientemente del lado de la pared del choque.

Resumen: si la pared es vertical, se debe invertir la componente horizontal de la velocidad. Si la pared es horizontal, se llega a que se debe invertir la componente vertical de la velocidad.

<u>Colisión de Bola con Bola</u>

Consideremos ahora la colisión de una bola con otra en el plano R^2. La situación podría ser similar a la Figura 4.

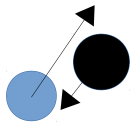

Figura 4: Bola azul en la trayectoria de colisión con bola negra

Usaremos subíndices ***a*** para la bola azul y ***n*** para la bola negra. Definimos:

$\vec{r}_a : Posición\ del\ centro\ de\ la\ bola\ azul$

$\vec{r}_n : Posición\ del\ centro\ de\ la\ bola\ negra$

$\vec{v}_a : Velocidad\ de\ la\ bola\ azul\ previo\ a\ la\ colisión$

$\vec{v}_n : Velocidad\ de\ la\ bola\ negra\ previo\ a\ la\ colisión$

La condición básica de choque es que la distancia entre los centros de ambas bolas sea inferior a la suma de sus radios (este método se conoce como detección a posteriori), esto es:

$$\|\vec{r}_a - \vec{r}_n\| < R_a + R_n,\quad desde\ un\ punto\ de\ vista\ de\ la\ programación,\ podemos\ definir\ la\ variable\ booleana:$$
$$areTouching = \|\vec{r}_a - \vec{r}_n\| < (R_a + R_n)$$

Esta condición es suficiente en la gran mayoría de los casos; sin embargo, hay situaciones donde el avance de las bolas luego de la colisión es muy pequeño como para que dejen de tocarse y esta condición seguiría siendo verdadera. Por esto una condición más robusta para detectar colisiones, debe verificar además que las distancia entre las bolas se esté acortando. En otras palabras, la rapidez de cambio de cambio de esta distancia sea negativa.

$$\frac{d\|\vec{r}_a - \vec{r}_n\|}{dt} < 0,\quad como\ \|\vec{r}_a - \vec{r}_n\| > 0\quad entonces\ podemos\ multiplicar\ en\ ambos\ por\ 2\|\vec{r}_a - \vec{r}_n\|:$$
$$2\|\vec{r}_a - \vec{r}_n\|\frac{d\|\vec{r}_a - \vec{r}_n\|}{dt} < 0,\ lo\ cual\ equivale\ a:$$
$$\frac{d\|\vec{r}_a - \vec{r}_n\|^2}{dt} < 0,\ descomponiendo\ los\ vectores\ y\ derivando,$$
$$\frac{d(r_{ax} - r_{nx})^2 + (r_{ay} - r_{ny})^2}{dt} = 2(r_{ax} - r_{nx})\frac{d(r_{ax} - r_{nx})}{dt} + 2(r_{ay} - r_{ny})\frac{d(r_{ay} - r_{ny})}{dt} < 0$$
$$2(r_{ax} - r_{nx})(v_{ax} - v_{nx}) + 2(r_{ay} - r_{ny})(v_{ay} - v_{ny}) < 0$$
$$2(\vec{r}_a - \vec{r}_n)\cdot(\vec{v}_a - \vec{v}_n) < 0\quad o\ equivalentemente:$$
$$(\vec{r}_a - \vec{r}_n)\cdot(\vec{v}_a - \vec{v}_n) < 0$$

Luego, podemos definir la siguiente variable booleana asociada al acercamiento de las bolas:

$$areApproaching = (\vec{r}_a - \vec{r}_n)\cdot(\vec{v}_a - \vec{v}_n) < 0$$

Como resumen, la condición de colisión de dos bolas es:

$$isCollision = areApproaching \wedge areTouching$$

Una vez determinada la condición de colisión, la conservación del momentum y la energía cinética permiten obtener la velocidad de la bola azul después del choque.

$$v_{\vec{a\ after}} = \vec{v}_a - \frac{2m_n}{m_a + m_n}\frac{(\vec{v}_a - \vec{v}_n)\cdot(\vec{r}_a - \vec{r}_n)}{\|\vec{r}_a - \vec{r}_n\|^2}(\vec{r}_a - \vec{r}_n)$$