Solución Primer Certamen (ELO-270)

21 de diciembre de 2011

- **El certamen es individual.**
- Ud. sólo puede usar lápiz y papel, i.e., no puede utilizar calculadoras, apuntes, formularios, etc.
- **Conteste sólo en el espacio asignado.**
- Respuestas sin justificación no recibirán puntaje.
- En el cuestionario, K y K_i, $i \in \mathbb{N}_0$, son constantes reales. Las restantes variables se definen en cada problema. Note que se omite el argumento s en funciones de transferencia.

Problema 1 *Considere el esquema de control en lazo abierto de la Figura 1. En dicho esquema, G_o es la planta, y C_1, C_2 son funciones de transferencia que han de ser diseñadas. La señal r es la referencia, d es una perturbación medible, y d_m es el ruido de medición correspondiente.*

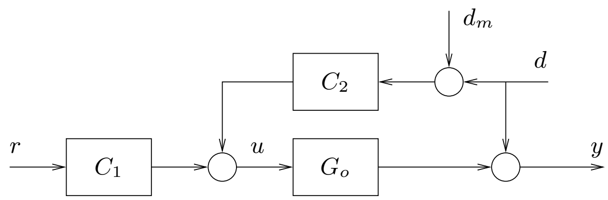

Figura 1: Lazo abierto considerado en el Problema 1.

1. ***(5 ptos)*** *Determine (en el plano de Laplace) la salida de la planta y en función de r, d y d_m.*
2. ***(5 ptos)*** *¿Cuáles son, a su juicio, las características que debe reunir una elección idealizada para C_1 y C_2?*
3. ***(15 ptos)*** *Suponga que*

$$G_o = \frac{-s+1}{s^2+1.2s+1}, \tag{1}$$

$r = K_1 + K_2 \sin 0.1t$, $d = K_3$, $d_m = K_4 \sin \omega_o t$, *con* $\omega_o \geq 5$ *rad/s. Proponga una elección razonable para* C_1 *y* C_2. *Justifique.*

Solución:

1. Usando la figura como referencia es evidente que

$$y = d + G_o\left(C_1 r + C_2\left[d_m + d\right]\right) = (1 + G_o C_2)d + G_o C_1 r + G_o C_2 d_m. \tag{2}$$

2. Como en todo sistema de control, la idea de la arquitectura propuesta es lograr que $y \approx r$, al menos en estado estacionario. Teniendo tal objetivo en mente, la relación derivada en la Parte 1 implica que C_1 debiese invertir a la planta G_o en las frecuencias de la referencia, C_2 debiese invertir a $-G_o$ en las frecuencias de la perturbación y, simultáneamente, $G_o C_2$ debiese ser muy pequeño en las frecuencias del ruido de medición.

3. Es fácil concluir que la estructura de control propuesta estará bien definida y será internamente estable si y sólo si C_1 y C_2 son propios y estables. Para dar respuesta a la pregunta se debe compatibilizar lo anterior con la respuesta a la Parte 2.

   - Elección de C_1. Una elección posible es

$$C_1 = \frac{K_1\left(s^2+1.2s+1\right)}{(s+1)(s+\alpha_1)} \quad \Rightarrow G_oC_1 = \frac{K_1(-s+1)}{(s+1)(s+\alpha_1)}. \tag{3}$$

     Por lo tanto C_1 invertirá (aproximadamente) a G_o en la banda de la referencia si $K_1 = \alpha_1$ y $\alpha_1 \gg 0.1$. Una elección posible es $K_1 = \alpha_1 = 2$.

   - Elección de C_2. Una elección posible es

$$C_2 = \frac{K_2\left(s^2+1.2s+1\right)}{(s+1)(s+\alpha_2)} \quad \Rightarrow G_oC_2 = \frac{K_2(-s+1)}{(s+1)(s+\alpha_2)}. \tag{4}$$

     Por lo tanto, C_2 invertirá (aproximadamente) a $-G_o$ a frecuencia cero (i.e., en la banda de la perturbación) si $K_2 = -\alpha_2$ y $\alpha_2 > 0$. Por otra parte, G_oC_2 será pequeño en las frecuencias en que el ruido es significativo si $\alpha_2 \ll 5$. Por lo tanto, una elección adecuada de parámetros es $K_2 = -\alpha_2 = -0.5$.

Problema 2 (15 ptos) *Considere el esquema de control realimentado de la Figura 2. En dicho esquema, G_o es la planta, C es el controlador, d_i y d_o modelan perturbaciones de entrada y salida, respectivamente, d_m es ruido de medición, y r es la referencia.*

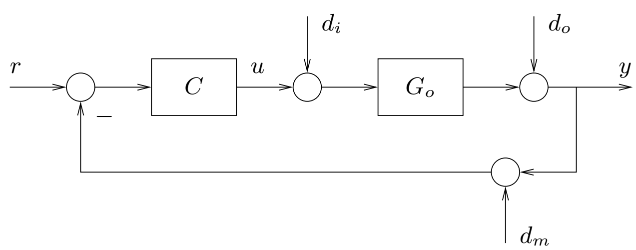

Figura 2: Lazo cerrado estándar.

Suponga que

$$G_o = \frac{1}{(s-1)(s+2)}, \tag{5}$$

que la referencia y perturbaciones de entrada son constantes, y que las perturbaciones de salida y ruido de medición son despreciables. Proponga una función de sensibilidad complementaria que permita lograr seguimiento perfecto en estado estacionario, i.e., que logre $y = r$ para tiempos suficientemente grandes.

Solución: Para que el lazo esté bien definido es necesario y suficiente que $\text{grel}\{T_o\} \geq \text{grel}\{G_o\} = 2$. Por otra parte, el lazo será internamente estable si y sólo si T_o es estable y $T_o(1) = 1$. Finalmente, el requerimiento de compensación perfecta de perturbaciones de entrada constantes implica $T_o(0) = 1$. Una posible elección para T_o es, por lo tanto,

$$T_o = \frac{k_1 s + k_2}{(s+1)^3}, \tag{6}$$

donde k_1 y k_2 han de elegirse de modo que $T_o(0) = 1$ y $T_o(1) = 1$, i.e., $k_2 = 1$ y $k_1 = 7$.

Problema 3 *Considere el esquema de control realimentado de la Figura 2. En dicho esquema, G_o es la planta, C es el controlador, d_i y d_o modelan perturbaciones de entrada y salida, respectivamente, d_m es ruido de medición, y r es la referencia.*

Suponga que

$$G_o = \frac{25(s^2 + 0.1s + 1)}{s(s - 10)}, \quad C = \frac{s + 2}{(s^2 + 0.1s + 1)}. \tag{7}$$

1. ***(5 ptos)** ¿Es el lazo resultante internamente estable?*
2. ***(10 ptos)** Identifique, entre las seis respuestas a escalón de la Figura 3, a la salida de la planta (i.e., y) y a la actuación correspondiente (i.e., u) cuando la referencia es un escalón unitario. Justifique.*

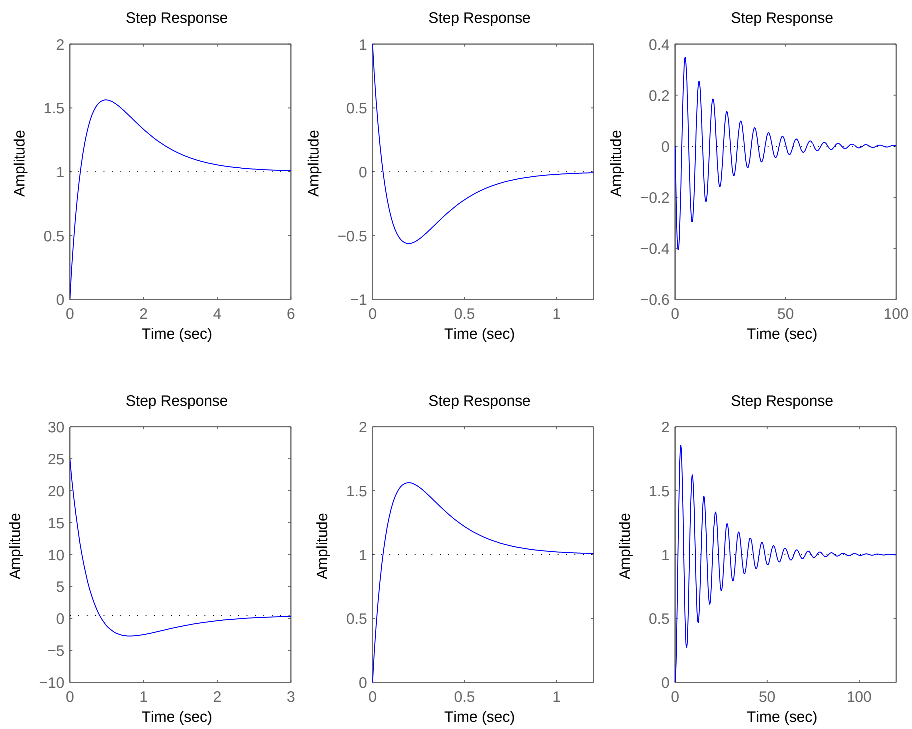

Figura 3: Respuestas a escalón asociadas al Problema 3.

Solución:

1. El polinomio característico del lazo resultantes es

$$\begin{aligned} A_{cl} &= (s^2 + 0.1s + 1)(s(s - 10) + 25(s + 2)) \\ &= (s^2 + 0.1s + 1)(s^2 + 15 + 50) = (s^2 + 0.1s + 1)(s + 5)(s + 10). \end{aligned} \tag{8}$$

   Resulta entonces evidente que el lazo es internamente estable.

2. El factor cuadrático en A_{cl} no aparece en el denominador de T_o (ni el de S_o) pues corresponde a factores cancelados entre la planta y el controlador. Además, $T_o(0) = 1$ pues el producto G_oC contiene un integrador. En consecuencia, la salida de la planta ante un escalón unitario tiende a uno

con el tiempo, y lo hace sin oscilaciones. Por otra parte el polo dominante de T_o está en $s = 5$ lo que implica un transiente de, aproximadamente, un segundo. La figura correspondiente es, por lo tanto, la segunda de la segunda fila.

El mismo razonamiento anterior permite concluir que el valor estacionario de u es cero, y que la dinámica correspondiente está dominada por polos complejos conjugados. En consecuencia, la figura que mejor describe a u es la tercera de la primera fila.

Problema 4 (15 ptos) *Considere el esquema de control realimentado de la Figura 2. En dicho esquema, G_o es la planta, C es el controlador, d_i y d_o modelan perturbaciones de entrada y salida, respectivamente, d_m es ruido de medición, y r es la referencia.*

Suponga que

$$G_o = \frac{1}{s-3}, \quad C = \frac{s+K_1}{s+K_2}. \tag{9}$$

Proponga, si existen, valores para K_1 y K_2 que permitan que el lazo resultante compense perfectamente perturbaciones de entrada constantes (en estado estacionario).

Solución: En primer lugar debemos garantizar la estabilidad del lazo. Observe que

$$A_{cl} = (s-3)(s+K_2) + s + K_1 = s^2 + (K_2 - 2)s + (3K_2 + K_1). \tag{10}$$

Por lo tanto, para que el lazo sea estable es necesario que $K_2 > 2$. Por otro lado, para compensar perfectamente perturbaciones de entrada constantes, se necesita que $K_2 = 0$ (así el controlador poseerá integración y $S_{io}(0) = 0$). Lo anterior contradice las condiciones para estabilidad y concluimos que es imposible hallar valores para K_1 y K_2 que permitan lograr lo pedido.

Problema 5 (15 ptos) *Considere el esquema de control realimentado de la Figura 2. En dicho esquema, G_o es la planta, C es el controlador, d_i y d_o modelan perturbaciones de entrada y salida, respectivamente, d_m es ruido de medición, y r es la referencia.*

Suponga que

$$G_o = \frac{1}{s}, \quad C = \frac{4.8(s^2 + 2s + 1.25)}{(s^2+4)}, \tag{11}$$

y que el lazo resultante está bien definido y es internamente estable. En estas condiciones, determine todas las perturbaciones de entrada y salida que pueden ser compensadas sin error estacionario, y todas las referencias que pueden ser seguidas sin error estacionario. Justifique.

Solución: Habrá seguimiento perfecto de una referencia de frecuencia ω_o, y compensación perfecta de perturbaciones de salida de la misma frecuencia, si y sólo si $S_o(\pm j\omega_o) = 0$ (o, equivalentemente, $T_o(\pm j\omega_o) = 1$). Esta última condición es equivalente a $G_o(\pm j\omega_o)C(\pm j\omega_o) = \infty$. En consecuencia, las frecuencias en que habrá seguimiento perfecto de la referencia, y compensación perfecta de perturbaciones de salida, son $\omega = 0$ y $\omega = 2$ rad/s.

Habrá compensación perfecta de perturbaciones de entrada de frecuencia ω_o si y sólo si $S_{io}(\pm j\omega_o) = 0$. Esta condición es equivalente a $C(\pm j\omega_o) = \infty$. En consecuencia, la frecuencia en que habrá compensación perfecta de perturbaciones de entrada es $\omega = 2$ rad/s.

Problema 6 ***(15 ptos)*** *En este problema Ud. deberá aplicar conceptos de control en lazo cerrado a un sistema de procesamiento de señales.*

Considere el esquema de la Figura 4. El bloque encerrado en un cuadro corresponde a un modelo de un cuantizador realimentado. Estos dispositivos están detrás de los sistemas de compresión de audio y video modernos (e.g., MP3). La idea es tomar la señal analógica r y convertirla en una secuencia de bits $\hat{r}$, garantizado cierto nivel de error. La señal q modela al ruido de cuantización correspondientes (i.e., los errores que se cometen al aproximar una señal analógica por una secuencia de bits). El error se mide filtrando la diferencia $\tilde{r}$ entre la señal original r y la versión cuantizada $\hat{r}$. En la figura, el filtro correspondiente es P (en el caso de audio, este filtro modela la respuesta en frecuencia del oído humano) y, consistente con lo anterior, el objetivo es que la señal $\tilde{r}_P$ sea lo más pequeña posible.

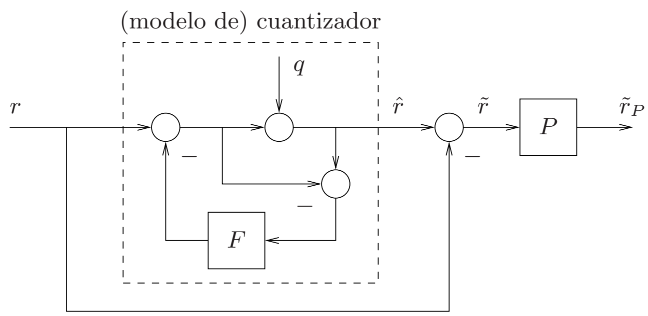

Figura 4: Modelo simplificado de un cuantizador realimentado.

Considere el esquema de la Figura 4 donde F y P son sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

1. *Determine condiciones necesarias y suficientes (sobre F y P) para que el lazo resultante esté bien definido.*

2. *Determine condiciones necesarias y suficientes (sobre F y P) para que el lazo resultante sea internamente estable.*

3. *Suponga que $r = \sin 0.1t$, que q es una señal con energía uniformemente distribuida en toda frecuencia, y que P es un filtro pasabajos con frecuencia de corte 2 rad/s. Proponga una elección apropiada para F.*

Solución: Resulta clave notar que la entrada del filtro F es igual a q. Por lo tanto, el esquema propuesto es equivalente a aquél de la Figura 5. En base a esta figura es inmediato concluir que:

1. El esquema resultante estará bien definido si y sólo si F y P son propios.

2. El esquema resultante será internamente estable si y sólo si F y P son estables.

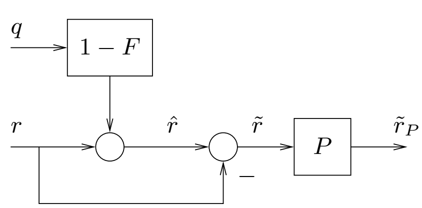

Figura 5: Modelo equivalente de un cuantizador realimentado.

3. Para dar respuesta a esta pregunta, comenzamos notando que

$$\tilde{r}_P = P\tilde{r} = P\left(-r + r + (1-F)q\right) = P(1-F)q. \tag{12}$$

Dado que q posee energía uniformemente distribuida en frecuencia, es claro que $\tilde{r}_P$ será pequeño si $(1-F)$ es pequeño en la banda de frecuencias en que P es significativo, i.e., para frecuencias menores a 2 rad/s. Por lo tanto, F debe ser un filtro pasabajos, con ganancia a continua unitaria, y con ancho de banda mayor a 2 rad/s. Una elección posible es

$$F = \frac{10}{s+10}. \tag{13}$$

(Note que la elección anterior es propia y estable.)

ESV - 22 de diciembre de 2011