Segundo Certamen (ELO-270)

28 de marzo de 2011

- **El certamen es individual.**
- Ud. sólo puede usar lápiz y papel, i.e., no puede utilizar calculadoras, apuntes, formularios, etc.
- Respuestas sin justificación no recibirán puntaje.
- En el cuestionario, K y K_i, $i \in \mathbb{N}_0$, son constantes reales. Las restantes variables se definen en cada problema. Note que se omite el argumento s en funciones de transferencia.

Problema 1 *Considere la planta de la Figura 1. Suponga que sólo d_1 e y pueden medirse, d_1 con ruido despreciable e y con ruido importante para frecuencias mayores a $2[rad/s]$. Suponga, además, que la referencia r es una señal con energía en la banda $[0,4][rad/s]$, y que la perturbación d_1 es relevante en la banda $[0,3][rad/s]$.*

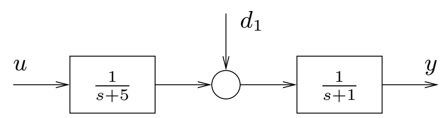

Figura 1: Planta considerada en el Problema 1.

1. ***(5 ptos.)** ¿Es conveniente utilizar un esquema de control estándar para controlar la planta anteriormente descrita? (Es decir, usar un lazo en que sólo se usa la medición de y y $u = C(r - y)$ donde C es el controlador.)*
2. ***(15 ptos.)** Proponga un esquema de control apropiado y especifique elecciones razonables para los bloques que deban diseñarse.*

Solución:

1. Si se intentara usar un lazo estándar para el control de la planta, la función de sensibilidad complementaria correspondiente debiese tener, simultáneamente, un ancho de banda mayor a $4[rad/s]$ (la referencia y perturbación poseen energía en la banda $[0,4][rad/s]$), y menor a $2[rad/s]$ (el ruido de medición posee energía para frecuencias mayores a $2[rad/s]$). En consecuencia, un lazo estándar no permitiría controlar apropiadamente a la planta. En conclusión, no es conveniente usar un lazo estándar.
2. Dado que existen contradicciones entre las especificaciones de ancho de banda para la sensibilidad complementaria, y tanto la referencia como la perturbación participan de ellas, proponemos utilizar el esquema de control de la Figura 2. Note que este esquema de control explota las mediciones de d_1 e y. Para la síntesis del controlador C, y de los filtros F y H, procederemos por etapas:

   a) Síntesis del controlador C. El controlador C debe estabilizar a la planta equivalente $G_{eq}(s) = (s+5)^{-1}(s+1)^{-1}$, lograr que el lazo resultante esté bien definido, y atenuar el ruido de medición. Dada la simplicidad de G_{eq}, es claro que

$$T_o(s) = \frac{G_{eq}(s)C(s)}{1 + G_{eq}(s)C(s)} = \frac{1}{s^2 + 2 \times 0.7 \times 1 \times s + 1} \quad (1)$$

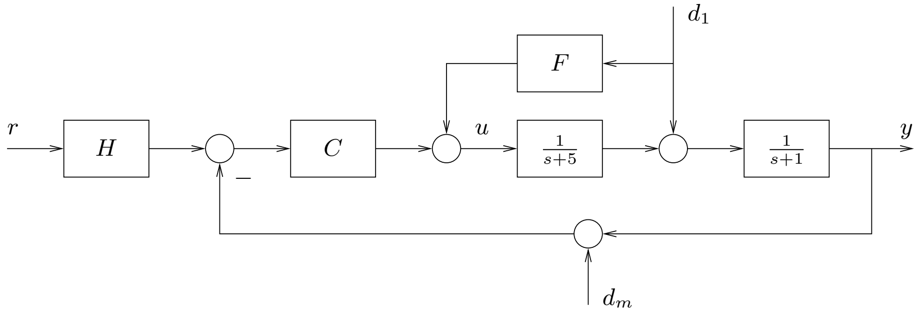

Figura 2: Esquema de control propuesto para el Problema 1.

es una elección adecuada. (T_o posee grado relativo igual al de la planta, es estable (y no existe la posibilidad de que hayan cancelaciones inestables entre planta y controlador) y, además, posee un ancho de banda del orden de $1[rad/s] < 2[rad/s]$ [las frecuencias del ruido de medición].) El controlador C puede despejarse de (1).

b) Síntesis de F. Es evidente que F debe ser estable y propio para que el lazo resultante sea estable y esté bien definido. Además, para compensar a la perturbación, F debe invertir a $-G_1 = -(s+5)^{-1}$ en la banda de la perturbación, i.e., en la banda $[0,3][rad/s]$. Una elección razonable es

$$F(s) = -\frac{10(s+5)}{s+10}. \tag{2}$$

De este modo $FG_1 \approx -1$ para $\omega < 10[rad/s]$.

c) Síntesis de H. Es evidente que H debe ser estable y propio para que el lazo resultante sea estable y esté bien definido. Además, para seguir a la referencia, H debe invertir a T_o (vea (1)) en la banda de la referencia, i.e., en la banda $[0,4][rad/s]$. Una elección razonable es

$$H(s) = \frac{10^2(s^2 + 2\times 0.7\times 1\times s + 1)}{s^2 + 2\times 0.7\times 10\times s + 10^2}. \tag{3}$$

De este modo, $HT_o \approx 1$ para $\omega < 10[rad/s]$.

Problema 2 *Considere el lazo de control de la Figura 3. Suponga que*

$$G_o(s) = \frac{2}{s(s-1)}, \quad C(s) = \frac{K(s+2)}{s+3}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

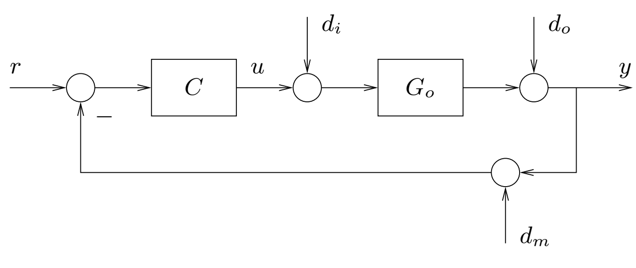

Figura 3: Lazo estándar con un grado de libertad.

1. ***(5 ptos.)*** *Determine todos los valores de K que estabilizan al lazo resultante.*

2. ***(10 ptos.)*** *Haga un diagrama, cualitativamente correcto, del lugar geométrico descrito por las raíces de lazo cuando $K > 0$.*

3. ***(5 ptos.)*** *Determine todos los valores de K, tanto positivos como negativos, tales que:*
   (a) *Todos los polos del lazo están en el plano izquierdo abierto.*
   (b) *Existe un par de polos complejos conjugados sobre el eje imaginario (i.e., con parte real igual a cero).*

Solución:

1. El polinomio característico del lazo resultante es

$$A_{cl}(s) = s(s-1)(s+3) + 2K(s+2) = s^3 + 2s^2 + (2K-3)s + 4K. \tag{4}$$

La tabla de Routh correspondiente está dada por

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2K-3 \\ s^2 & 2 & 4K \\ s^1 & -3^{(*)} & \\ s^0 & 4K & \end{array} \quad , \quad (*) : -\frac{1}{2}(4K - 2(2K-3)) = -3. \tag{5}$$

Resulta evidente que no existe valor de K que estabilice al lazo.

2. La ecuación característica $A_{cl}(s) = 0$ puede escribirse como

$$1 + \underbrace{(2K)}_{\lambda} \underbrace{\frac{s+2}{s(s-1)(s+3)}}_{F(s)} = 0. \tag{6}$$

Por lo tanto, el lugar geométrico de raíces buscado posee dos asíntotas con ángulos $\pm\pi/2$ e intercepto $\sigma = (0 + 1 - 3 - (-2))/2 = 0$. Note que la convergencia de los polos del lazo hacia las asíntotas es desde el plano derecho. (Si fuese desde el plano izquierdo, entonces existiría algún valor de $K > 0$ que estabiliza al lazo.) El diagrama se ilustra en la Figura 4.

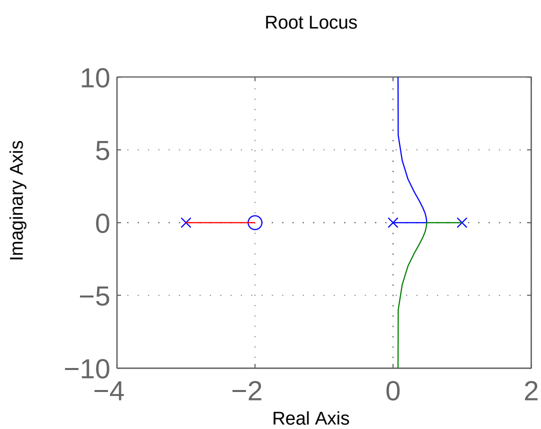

Figura 4: LGR que da respuesta a la Pregunta 2 del Problema 2.

3. (a) Dada la conclusión obtenida en la Parte 1, no existe K, positivo ni negativo, que haga que todas las raíces del lazo estén en el plano izquierdo abierto.

(b) Si $K > 0$, entonces el LGR de la Figura 4 permite concluir que no existe tal valor de K. Si $K < 0$, es fácil ver que las raíces del lazo serán siempre reales. Por lo tanto, tampoco existe $K < 0$ que cumpla con lo pedido.

Problema 3 *Considere el lazo de la Figura 3. Suponga que el producto G_oC tiene la respuesta en frecuencia indicada en la Figura 5, y sólo un polo en el plano derecho cerrado (i.e., el único polo inestable de G_oC posee parte real estrictamente positiva).*

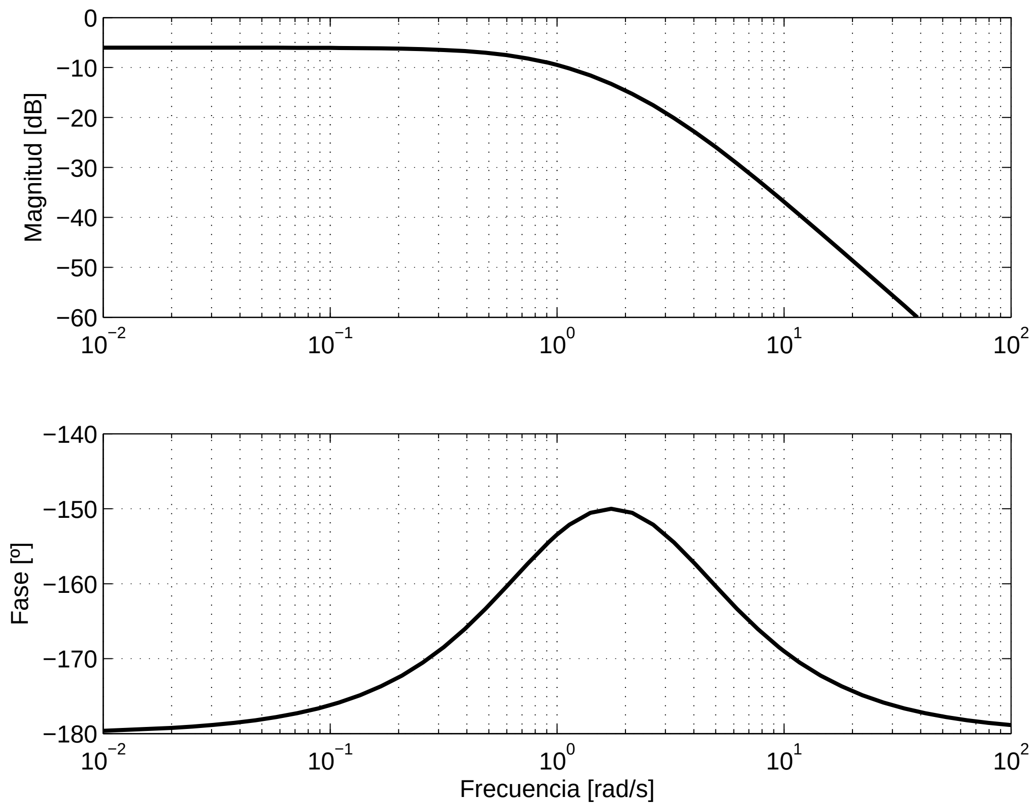

Figura 5: Diagrama de Bode considerado en el Problema 3.

1. ***(10 ptos.)*** *¿Es el lazo resultante estable?*

2. ***(5 ptos.)*** *Suponga que el controlador C se reemplaza por el controlador $\hat{C} = 5C$. ¿Es el nuevo lazo estable?*

Solución:

1. Usando el diagrama de Bode de la Figura 5 podemos concluir que el diagrama polar de G_oC es similar a aquél dibujado en la Figura 6. Note que el diagrama no encierra al punto -1 pues la magnitud de G_oC es menor a uno para toda frecuencia. Por lo tanto, $N = 0$. Asimismo, las condiciones del problema indican que $P = 1$. Por lo tanto, $Z = 1$ y el lazo es inestable.

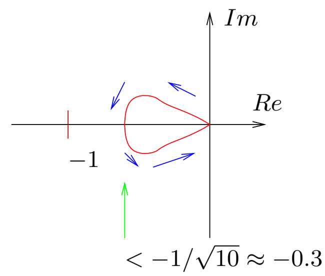

Figura 6: Diagrama polar que permite dar respuesta a la Pregunta 1 del Problema 3.

2. El este caso, el diagrama encerrará al punto -1 una vez en sentido contra-reloj, i.e., $N = -1$. Por lo tanto, $Z = 0$ y el nuevo lazo será estable.

Problema 4 ***(20 ptos.)*** *Suponga que la planta*

$$G_o(s) = \frac{-s+5}{(s-0.5)(s^2 + 2 \times 0.6 \times 2 \times s + 4)}$$

debe controlarse usando el esquema de control de la Figura 3. Suponga que $r(t) = K_1$, $d_i(t) = K_2 \sin(t + K_3)$, $d_o(t) = K_4$, y que d_m es relevante para frecuencia superiores a $10[rad/s]$. Proponga, con el máximo de detalle y en la forma más explícita posible, una ecuación polinomial que permita sintetizar un controlador que,

(a) *en ausencia de ruido de medición, provea error estacionario cero (i.e., sea tal que, si $d_m = 0$, entonces $e = r - y \to 0$ cuando $t \to \infty$) y, además,*

(b) *evite que la respuesta ante cambios en la referencia presente exceso de* undershoot *(respuesta inversa) u* overshoot *(sobrepasamiento).*

Solución: Dado que se necesita error estacionario cero en ausencia de ruido de medición, elegiremos un controlador bipropio de la forma

$$C(s) = \frac{P(s)}{s(s^2+1)\bar{L}(s)}, \tag{7}$$

donde P y $\bar{L}$ son polinomios tales que $\text{gr}\{P\} = 3 + \text{gr}\{\bar{L}\}$ (recuerde que se eligió un controlador bipropio).

Con el objeto de poder elegir los polos del lazo en forma arbitraria, consideraremos un polinomio característico A_{cl} tal que

$$\text{gr}\{A_{cl}\} = 2 \times \text{gr}\{\text{den}\{G_o\}\} - 1 + \text{gr}\{s(s^2+1)\} + \text{grel}\{C\} = 2 \times 3 - 1 + 3 + 0 = 8. \tag{8}$$

Dadas las descripciones para la referencia, las perturbaciones y el ruido, concluimos que el ancho de banda del lazo (i.e., el ancho de banda de la sensibilidad complementaria correspondiente) debe ser mayor a $1[rad/s]$ y menor a $10[rad/s]$. Además, para evitar que haya exceso de undershoot u overshoot, necesitamos polos *dominantes* del lazo con parte real en el intervalo $[-5, -0.5]$. En consecuencia, una elección razonable (aunque no necesariamente "buena") para A_{cl} es

$$A_{cl}(s) = (s^2 + 2 \times 0.6 \times 2 \times s + 4)(s^2 + 2 \times 0.6 \times 3 \times s + 9)(s+9)^4. \tag{9}$$

Así, la ecuación polinomial buscada es

$$(s^2 + 2 \times 0.6 \times 2 \times s + 4)(s^2 + 2 \times 0.6 \times 3 \times s + 9)(s+9)^4$$

$$= (s-0.5)(s^2+2\times 0.6\times 2\times s+4)s(s^2+1)\bar{L}(s)+(-s+5)P(s), \quad (10)$$

donde

$$\bar{L}(s)=\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3, \quad P(s)=\beta_1 s^5+\beta_2 s^4+\beta_3 s^3+\beta_4 s^2+\beta_5 s+\beta_6. \quad (11)$$

Note que, al igualar coeficientes entre ambos lados de la ecuación polinomial (10), surgirán 9 ecuaciones en las nueve incógnitas $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\ldots,\beta_6$.

Problema 5 ***(25 ptos.)*** *Considere el esquema de control en cascada de la Figura 7. Suponga que*

$$G_1(s)=\frac{4}{s+6}, \quad G_o(s)=\frac{-s+2}{s^2+2\times 0.3\times s+1},$$

y que

$$r(t)=K_1, \quad d_o(t)=K_2+K_3\sin(0.1t+K_4), \quad d_1(t)=K_5\sin(4t+K_6), \quad d_{m_1}(t)=0,$$

y que d_{m_o} posee energía significativa para frecuencias $\omega\geq 2[rad/s]$. Proponga elecciones razonables para C_1 y C_2, suponiendo que C_1 debe ser un controlador PI. Justifique cuidadosamente sus decisiones.

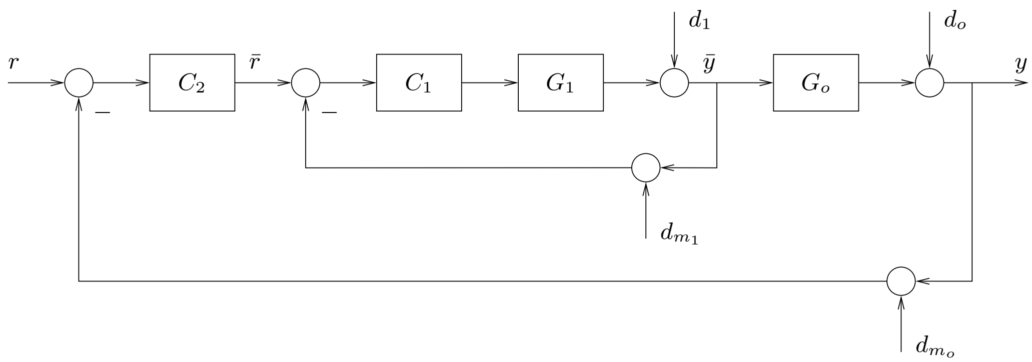

Figura 7: Esquema de control en cascada.

Solución:

1. Síntesis de C_1. Para la síntesis de C_1, basta con tener en mente la atenuación de la perturbación d_1 (recuerde que $d_{m_1}=0$). Dadas las condiciones del problema, C_1 debe ser un controlador de la forma

$$C_1(s)=\frac{K(s+a)}{s}. \quad (12)$$

   Los parámetros K y a han de elegirse de modo tal que el lazo interno sea estable, esté bien definido, y la función de sensibilidad complementaria correspondiente, i.e.,

$$T_{o1}=\frac{G_1C_1}{1+G_1C_1}, \quad (13)$$

   posea un ancho de banda mayor a $4[rad/s]$.

   El lazo estará bien definido para todo valor de K y a. Por simplicidad, elegimos $a=6$ (así se cancela el polo estable de G_1). Esto implica

$$T_{o1}(s)=\frac{4K}{s+4K}. \quad (14)$$

Por lo tanto el lazo será estable para todo $K > 0$ y T_{o1} tendrá el ancho de banda buscado si $K > 1$. Elegimos $K = 2.5$. Así,

$$C(s) = \frac{2.5(s+6)}{s}, \quad T_{o1}(s) = \frac{10}{s+10}. \tag{15}$$

2. Síntesis de C_2. Para la síntesis de C_1, puede despreciarse el efecto de d_1. El controlador C_2 "ve" la planta equivalente

$$G_{eq}(s) = T_{o1}(s)G_o(s) = \frac{10(-s+2)}{(s^2 + 2 \times 0.3 \times s + 1)(s+10)}. \tag{16}$$

Dadas las descripciones para r, d_o y d_{m_o}, concluimos que

$$T_{o2}(s) = \frac{G_{eq}(s)C_2(s)}{1 + G_{eq}(s)C_2(s)} = \frac{0.8^2(-s+2)}{(s+2)(s^2 + 2 \times 0.7 \times 0.8 \times s + 0.8^2)} \tag{17}$$

es una elección razonable para la sensibilidad complementaria del lazo externo. De hecho, T_{o2} posee el mismo grado relativo que la planta equivalente, es estable y posee un cero en el único cero inestable de G_{eq}, tiene ganancia continua unitaria y, además, posee un ancho de banda del orden de $0.8[rad/s]$. Así, se seguirá la referencia, se compensará la perturbación de salida d_o, y se atenuará el ruido de medición d_{m_o}. El controlador C_2 puede despejarse de (17).

ESV - 27 de marzo de 2012