
Segunda Tarea IPD-431

13 de Junio de 2012

Generalidades

- La tarea es de carácter *individual*.
 - Su informe debe estar escrito en algún procesador de texto. (Se recomienda usar L^AT_EX.) El formato específico del informe queda a su criterio.
 - *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario).
 - La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
 - Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
 - Referencias complementarias sugeridas: [1, Capítulos 3 y 4], [2, Capítulos 5 y 6], [3, Ejercicio 1.6, Capítulo 2], [4].
 - **Fecha de entrega (límite):** 27 de Junio de 2012, 9:45hrs.
-

Problema 1

Suponga que U es un proceso estacionario en sentido amplio con media cero y densidad espectral de potencia

$$S_U(e^{j\omega}) = \left| \frac{e^{j\omega} - 4}{(e^{j\omega} - 3)(e^{j\omega} - 0.7)} \right|^2. \quad (1)$$

1. Construya un proceso asintóticamente estacionario en sentido amplio tal que sus estadísticas estacionarias de primer y segundo orden sean iguales a las del proceso U .
2. ¿Es posible construir un proceso asintóticamente estacionario en sentido amplio tal que sus estadísticas de segundo orden sean iguales a las del proceso U para todo instante?
3. Denote por $\hat{U}$ al proceso por Ud. construido en la primera pregunta. Calcule $P_{\hat{U}}(k)$ y verifique que $P_{\hat{U}}(k) \rightarrow P_U$ cuando $k \rightarrow \infty$. Ilustre usando Matlab.
4. Suponga que el proceso U excita a un sistema lineal e invariante en el tiempo con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{z(z - 0.5)}. \quad (2)$$

Denote por Y a la salida de dicho sistema. Calcule, explícitamente, la media, varianza y función de covarianza estacionaria de Y .

Problema 2

Suponga que X es un proceso estacionario en sentido amplio escalar, y que se cuenta con mediciones de $\{X(0), \dots, X(N-1)\}$.

1. Para estimar la media de X se propone el estimador

$$\hat{\mu}_X \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X(i). \quad (3)$$

- a) Demuestre que $\hat{\mu}_X$ es un estimador insesgado de μ_X , i.e., demuestre que $\mathcal{E}\{\hat{\mu}_X\} = \mu_X$. ¿Cuál es la relevancia práctica de esta propiedad?
- b) Demuestre que, si $S_X(1) < \infty$, entonces $\hat{\mu}_X$ es un estimador consistente para μ_X , i.e., demuestre que, para todo μ_X y todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\{|\hat{\mu}_X - \mu_X| > \epsilon\} = 0. \quad (4)$$

¿Cuál es la relevancia práctica de que $\hat{\mu}_X$ sea un estimador consistente para μ_X ?

(Ayuda: Demuestre primero que

$$\text{var}\{\hat{\mu}_X\} = \frac{1}{N} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) R_X(\tau). \quad (5)$$

Luego, explote el que $S_X(1) < \infty$ para probar que $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}\{\hat{\mu}_X\} = 0$.)

2. Para estimar la función de covarianza de X se propone el estimador

$$\hat{R}_X(\tau) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{(N-1)-|\tau|} (X(k+|\tau|) - \hat{\mu}_X)(X(k) - \hat{\mu}_X), \quad (6)$$

donde $\tau \in \{-(N-1), -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N, N-1\}$. Pruebe que, si $S_X(1) < \infty$ y $|\tau| \ll N$, entonces

$$\mathcal{E}\{\hat{R}_X(\tau)\} \approx \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) R_X(\tau) - \left(\frac{N-|\tau|}{N^2}\right) S_X(1). \quad (7)$$

Concluya en base a lo anterior que $\hat{R}_X(\tau)$ es un estimador con sesgo para $R_X(\tau)$. Sin embargo, si $|\tau| \ll N$, entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_X(\tau)\} \approx R_X(\tau)$, i.e., si τ es pequeño, $\hat{R}_X(\tau)$ será para todo efecto práctico un estimador asintóticamente insesgado para $R_X(\tau)$.

3. Para estimar la densidad espectral de potencia de X se propone el estimador

$$\hat{S}_X(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_X(\tau) e^{-j\omega\tau}. \quad (8)$$

- a) Pruebe que

$$\hat{S}_X(e^{j\omega}) = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j\omega k} \right|^2. \quad (9)$$

Esta relación permite calcular fácilmente $\hat{S}_X(e^{j\omega})$ haciendo uso de la transformada rápida de Fourier (FFT).

- b) Suponga que $\mu_X = 0$. Pruebe que $\hat{S}_X(e^{j\omega})$ es un estimador asintóticamente insesgado para $S_X(e^{j\omega})$, i.e., pruebe que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \hat{S}_X(e^{j\omega}) \right\} = S_X(e^{j\omega}). \quad (10)$$

(**Ayuda:** Calcule primero $\mathcal{E} \left\{ \hat{R}_X(\tau) \right\}$ haciendo uso explícito de que $\mu_X = 0$.) ¿Qué propiedad necesitaría verificar para demostrar tal afirmación cuando $\mu_X \neq 0$?

4. Ilustre todos los puntos anteriores usando Matlab. (**Comandos útiles:** mean, xcorr, fft.)

Problema 3

Considere un sistema modelado a través de la relación

$$X(k+1) = A(\theta(k))X(k) + B(\theta)U(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad X(0) = X_o, \quad (11)$$

$$Y(k) = C(\theta(k))X(k) + D(\theta)U(k), \quad (12)$$

donde X es el estado, U es la entrada, Y es la salida, θ es un proceso aleatorio auxiliar tal que $\theta(k) \in \{0, 1\}$, y $A(0), A(1), \dots, D(0), D(1)$ son matrices reales determinísticas de dimensiones apropiadas. Suponga que X_o es una variable aleatoria de segundo orden, media cero y varianza P_o , que U es una secuencia de ruido blanco, de media cero y varianza (constante) P_U , que θ es una secuencia iid tal que $P_r \{ \theta(k) = 1 \} = p$ para algún $p \in (0, 1)$, y que (X_o, U, θ) son mutuamente independientes.

Defina, para $\Gamma \in \{A, B, C, D\}$,

$$\Gamma_p \triangleq \Gamma_0 + p\Gamma_1, \quad \Gamma_0 \triangleq A(0), \quad \Gamma_1 \triangleq \Gamma(1) - \Gamma(0). \quad (13)$$

1. Demuestre que la varianza del estado obedece a la recursión

$$P_X(k+1) = A_p P_X(k) A_p^T + B_p P_U B_p^T + p(1-p) (A_1 P_X(k) A_1^T + B_1 P_U B_1^T), \quad (14)$$

donde $k \in \mathbb{N}_0$ y $P(0) = P_o$. (**Ayuda:** Reescriba las ecuaciones del sistema en términos de la secuencia $\tilde{\theta} \triangleq \theta - p$, y verifique que $\mu_{\tilde{\theta}}(k) = 0$ y $P_{\tilde{\theta}}(k) = p(1-p)$.)

2. Demuestre que la varianza de la salida satisface

$$P_Y(k) = C_p P_X(k) C_p^T + D_p P_U D_p^T + p(1-p) (C_1 P_X(k) C_1^T + D_1 P_U D_1^T). \quad (15)$$

3. Demuestre que la función de covarianza del estado satisface $R_X(k+\tau, k) = A_p^\tau P_X(k)$ para $\tau, k \in \mathbb{N}_0$.
4. Diremos que el sistema es estable en sentido cuadrático medio si y sólo si X es un proceso asintóticamente estacionario en sentido amplio para todo estado inicial X_o y entrada U como los descritos anteriormente. Establezca una condición necesaria y suficiente para que el sistema es estable en sentido cuadrático medio.
5. Suponga que el sistema es estable en sentido cuadrático medio y calcule, de ser posible, la densidad espectral de potencia del estado.

Referencias

- [1] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems*. Springer, second edition, 2002.
- [2] M. B. Priestley. *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, London, 1989.
- [3] P. Stoica and R.L. Moses. *Introduction to spectral analysis*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [4] O.L.V. Costa, M.D. Fragoso, and R.P. Marques. *Discrete Time Markov Jump Linear Systems*. Springer, 2005.