
Tercera Tarea IPD-431

27 de Junio de 2012

Generalidades

- La tarea es de carácter *individual*.
 - Su informe debe estar escrito en algún procesador de texto. (Se recomienda usar L^AT_EX.) El formato específico del informe queda a su criterio.
 - *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario). Si en una pregunta se pide demostrar un resultado, no basta con que Ud. cite alguna referencia. Debe proveer todos los detalles que corresponda.
 - La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
 - La tarea posee un total de 115 puntos. Los puntos que Ud. obtenga por sobre los 100 puntos, contarán cómo crédito para el cálculo del promedio de tareas.
 - Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
 - **Fecha de entrega (límite):** 11 de Julio de 2012, 9:45hrs.
-

Problema 1 (50 ptos.)

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo descrito a través de la relación

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x(0) = x_o, \quad (1)$$

$$y(k) = C_y x(k) + D_y w(k), \quad (2)$$

$$z(k) = C_z x(k) + D_z w(k), \quad (3)$$

donde x es el estado, w es un proceso wss, y y z son salidas, y las matrices A, B, C_i, D_i son constantes de dimensiones apropiadas. Suponga que el estado inicial es una variable aleatoria de segundo orden de media cero y varianza P_o , que la señal w es ruido blanco de media cero y varianza $P_w = I$, no correlacionada con x_o , y que A es estable y $D_y D_y^T > 0$. Interesa estimar z usando mediciones de y . Para ello, se procesará y usando un filtro lineal e invariante en el tiempo, cuya salida denotamos por $\hat{z}$ (vea la Figura 1(a)). Defina

$$H_{\text{ep,opt}} \triangleq \arg \min_{H \in \mathcal{RH}_2} P_{\tilde{z}}, \quad H_{\text{bp,opt}} \triangleq \arg \min_{H \in \mathcal{RH}_\infty} P_{\tilde{z}}, \quad (4)$$

donde $P_{\tilde{z}}$ es la varianza estacionaria del error de estimación $\tilde{z} \triangleq \hat{z} - z$, $\mathcal{RH}_\infty$ es el conjunto de todas las funciones de transferencia estable y propias, y $\mathcal{RH}_2$ es el conjunto de todas las funciones de transferencia estables y estrictamente propias.

1. (20 ptos.) Demuestre que (**Ayuda:** Vea [1, Capítulo 6].)

$$H_{\text{ep,opt}}(z) = C_z(zI - A + JC_y)^{-1}J, \quad (5)$$

donde

$$J \triangleq (APC_y^T + BD_y^T)(C_yPC_y^T + D_yD_y^T)^{-1} \quad (6)$$

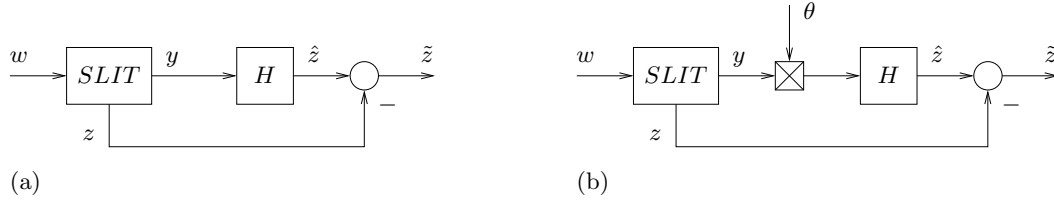


Figura 1: Problema de filtraje óptimo considerado (a) mediciones perfectas y (b) mediciones intermitentes.

y P es la única solución positiva semidefinida de la ecuación algebraica de Riccati

$$P = APA^T + BB^T - (APC_y^T + BD_y^T)(C_yPC_y^T + D_yD_y^T)^{-1}(APC_y^T + BD_y^T)^T. \quad (7)$$

Demuestre, además, que la varianza estacionaria óptima del error de estimación correspondiente, digamos P_z^{ep} , satisface

$$P_z^{\text{ep}} = C_zPC_z + D_zD_z^T. \quad (8)$$

2. (10 ptos.) Demuestre que

$$H_{\text{bp,opt}}(z) = (C_z - J_2C_y)(zI - A + JC_y)^{-1}J + J_2, \quad (9)$$

donde J y P son como antes y

$$J_2 \triangleq (C_zPC_y^T + D_zD_y^T)(C_yPC_y^T + D_yD_y^T)^{-1}. \quad (10)$$

Demuestre, además, que la varianza estacionaria óptima del error de estimación correspondiente, digamos P_z^{bp} , satisface

$$P_z^{\text{bp}} = P_z^{\text{ep}} - J_2(C_zPC_y^T + D_zD_y^T). \quad (11)$$

3. (5 ptos.) Verifique que, al utilizar un filtro propio, se obtiene una varianza estacionaria menor que al utilizar un filtro estrictamente propio. ¿Es esto razonable?
4. (15 ptos.) Ilustre todos los resultados y observaciones anteriores a través de un ejemplo sencillo (pero no trivial) en Matlab. Use los resultados de sus simulaciones para verificar, usando el estimador para la varianza introducido en la Tarea 2, que las varianzas estacionarias de los errores de estimación alcanzadas con los filtros propuestos, están dadas por las expresiones por Ud. deducidas en las preguntas anteriores. (**Comandos Matlab útiles: dare, randn, var, mean**).

Problema 2 (25 ptos.)

Explique cómo utilizar el filtro de Kalman para estimar los parámetros de la función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo. Para ello, considere la discusión en [2, Capítulo 3]. Ilustre el método a través de un ejemplo sencillo. ¿Qué ventajas tiene este método cuando se compara con aquél considerado en el Problema 3 de la Tarea 1?

Problema 3 (40 ptos.)

Considere nuevamente el Problema 1. Suponga ahora que sólo se tiene acceso intermitente a y . Es decir, suponga que el filtro H es alimentado con la señal y_θ , donde

$$y_\theta(k) = \theta(k)y(k), \quad (12)$$

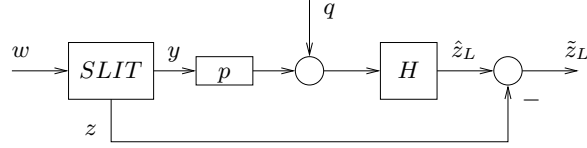


Figura 2: Sistema auxiliar.

y θ es una secuencia iid, independiente de (w, x_o) , tal que $P_r\{\theta(k) = 1\} = p$ para algún $p \in (0, 1)$. La situación descrita puede representarse como ilustra la Figura 1(b). Se puede probar que el sistema de la Figura 1(b) es estable en sentido cuadrático medio si y sólo si tanto el SLIT como H son internamente estables. Usando este resultado, y los resultados del Problema 3 en la Tarea 2, y del Problema 1 en esta tarea, encuentre una expresión para el filtro H en $\mathcal{RH}_2$ que minimiza la varianza estacionaria de $\tilde{z}$. Para ello, se sugiere que primero demuestre que el problema de hallar H en la situación descrita, es equivalente a hallar el filtro H estrictamente propio y estable que minimiza la varianza de $\tilde{z}_L$ en el esquema de la Figura 2, donde p es una ganancia igual a la probabilidad de transmisión exitosa, y q es ruido blanco de media cero y varianza (constante) $P_q = p(1 - p)P_y$ (consistente con nuestra notación, P_y es la varianza estacionaria de y).

Referencias

- [1] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems*. Springer, second edition, 2002.
- [2] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal filtering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979.