
Cuarta Tarea IPD-431

12 de Julio de 2012

Generalidades

- La tarea es de carácter *individual*.
 - Su informe debe estar escrito en algún procesador de texto. (Se recomienda usar L^AT_EX.) El formato específico del informe queda a su criterio.
 - *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario). Si en una pregunta se pide demostrar un resultado, no basta con que Ud. cite alguna referencia. Debe proveer todos los detalles que corresponda.
 - La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
 - Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
 - **Fecha de entrega (límite):** 26 de Julio de 2012, 9:45hrs.
-

Problema 1 (50 ptos.; vea [1–3])

Considere una planta¹ descrita a través de la relación

$$y_G = G(d + u), \quad (1)$$

donde G es una función de transferencia estable y estrictamente propia, d es una perturbación² estacionaria en sentido amplio de segundo orden, con media cero y espectro S_d , y u es una entrada manipulable. Denote al estado de G por x_G y suponga que el estado inicial $x_{G,o}$ es una variable aleatoria de segundo orden no correlacionada con d . Suponga que se puede medir y_G haciendo uso de un sensor ruidoso cuya salida, digamos y , puede describirse a través de la relación

$$y = y_G + e_y, \quad (2)$$

donde e_y es ruido de medición, blanco, de media cero y no correlacionado con $(x_{G,o}, d)$.

1. Describa la situación anterior a través del modelo estándar

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + v(k), \quad x(0) = x_o, \quad (3a)$$

$$y(k) = Cx(k) + e(k). \quad (3b)$$

Ponga énfasis en la relación existente entre las matrices (A, B, C) , la función de transferencia G y el espectro S_d , y entre los ruidos auxiliares v y e , y la perturbación d y el ruido de medición e_y .

2. Los resultados estudiados en clase permiten hallar, para la planta descrita en (3), controladores lineales óptimos usando como criterio de optimalidad un funcional cuadrático. En el caso considerado aquí, ¿es razonable suponer que se puede medir el estado x ?

¹I.e., un sistema que debe controlarse.

²I.e., una entrada no manipulable.

3. Considere el funcional

$$J = \mathcal{E} \left\{ y(N)^T y(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left(y(k)^T y(k) + \rho u(k)^T u(k) \right) \right\}, \quad (4)$$

donde $\rho > 0$ es un parámetro de diseño. Describa el modo de hallar el controlador lineal que minimiza a J suponiendo que $u(k)$ puede ser una función de x^k . Repita para el caso en que $u(k)$ puede ser una función de y^k .

4. Ejemplifique el punto anterior usando Matlab. Considere para ello una función de transferencia G de dimensión 2×2 (i.e., una planta con dos entradas y dos salidas) y suponga que d posee un espectro pasabajos. Muestre gráficos de la actuación u , de las salida y , y del estado de la planta x_G . Compare los dos controladores por Ud. propuestos estimando para ello el valor del funcional J en cada caso. Comente acerca del efecto de ρ en la calidad del control. Para realizar lo anterior considere un horizonte N razonable. ¿Converge el controlador a un controlador invariante en el tiempo cuando $N \rightarrow \infty$?

Problema 2 (50 ptos.; vea [4])

Considere un vector aleatorio de segundo orden $Y \sim N(X\theta, \sigma^2 I)$, donde θ es un vector de parámetros determinísticos, pero desconocidos, X es una matriz determinística y conocida de dimensiones apropiadas, y σ^2 es un escalar determinístico y desconocido. Suponga que $X^T X$ es no singular y defina

$$\hat{\theta} \triangleq (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (5)$$

1. Demuestre que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado y de mínima varianza para θ basado en una medición del vector Y . Para ello, se recomienda que siga los siguientes pasos:

a) Defina $\beta \triangleq [\theta^T \sigma^2]^T$ y verifique que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_Y(Y; \beta) = \frac{1}{\sigma^2} (Y - X\theta)^T X \triangleq V_1^T, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln f_Y(Y; \beta) = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) \triangleq V_2, \quad (7)$$

donde V_1 es un vector (columna) y V_2 es un escalar (ambos aleatorios).

b) Pruebe que

$$\mathcal{E} \{V_1 V_2\} = 0, \quad \mathcal{E} \{V_1 V_1^T\} = \frac{1}{\sigma^2} X^T X. \quad (8)$$

c) Calcule la matriz de información de Fisher M_β .

d) Verifique que $P_{\hat{\theta}}$ es igual a la cota inferior de Cramer-Rao correspondiente.

2. Pruebe que $\hat{\theta} \sim N(\theta, (X^T X)^{-1} \sigma^2)$.

3. Demuestre que el vector de residuos $R \triangleq Y - X\hat{\theta}$ distribuye en forma normal y es independiente de $\hat{\theta}$. Determine, además, expresiones compactas para la media y la varianza de los residuos R .

Referencias

- [1] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems*. Springer, second edition, 2002.
- [2] K.J. Åström. *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, New York, 1970.
- [3] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972.
- [4] G.C. Goodwin and R.L. Payne. *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*. Academic Press, New York, 1977.