Elementos de control en lazo cerrado

14 de diciembre de 2011

1. Introducción

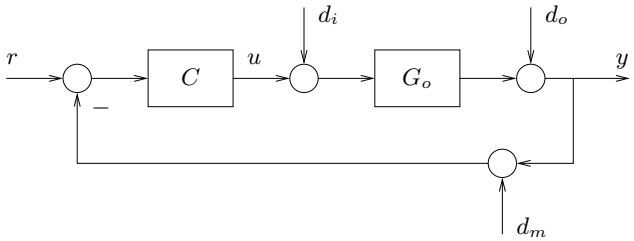

Figura 1: Lazo de control estándar.

La Figura 1 muestra un lazo de control elemental. En dicha figura, G_o corresponde a (un modelo de) la planta, C es el controlador, r es la señal de referencia, d_i y d_o son perturbaciones de entrada y salida, respectivamente, y d_m corresponde a ruido de medición. En este contexto, el problema fundamental es elegir un controlador tal que:

1. El sistema realimentado resultante (i.e., aquél de la Figura 1) tenga sentido físico.
2. El sistema realimentado resultante sea (internamente) estable.
3. La salida y de la planta aproxime a la referencia r, al menos en estado estacionario.

A continuación revisaremos condiciones concretas que permiten satisfacer lo anterior. Para ello supondremos que el modelo de la planta es perfecto.

Remark 1 *Lo que sigue supone que Ud. está familiarizado con los conceptos elementales de sistemas lineales.* ■

2. Funciones de sensibilidad

Es fácil probar que las ecuaciones que relacionan las señales de entrada r, d_i, d_o, d_m con la salida y y la actuación u son (suponemos, sin pérdida de generalidad, que las condiciones iniciales de la planta y controlador son cero)

$$y = T_o(r - d_m) + S_o d_o + S_{io} d_i, \tag{1}$$

$$u = S_{uo}(r - d_m - d_o) - T_o d_i, \tag{2}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_o &\triangleq \frac{1}{1 + G_o C} && \text{es la función de sensibilidad del lazo,} \\
T_o &\triangleq \frac{G_o C}{1 + G_o C} = 1 - S_o && \text{es la función de sensibilidad complementaria del lazo,} \\
S_{io} &\triangleq \frac{G_o}{1 + G_o C} = G_o S_o = \frac{T_o}{C} && \text{es la función de sensibilidad de entrada del lazo,} \\
S_{uo} &\triangleq \frac{C}{1 + G_o C} = C S_o = \frac{T_o}{G_o} && \text{es la función de sensibilidad de control lazo.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Las cuatro funciones S_o, T_o, S_{io} y S_{uo}, llamadas colectivamente funciones de sensibilidad del lazo, juegan un rol fundamental a la hora de analizar y sintetizar lazos de control.

Suponga que

$$G_o = \frac{B_o}{A_o}, \quad C = \frac{P}{L}, \tag{4}$$

donde tanto A_o y B_o, como P y L, son pares de polinomios coprimos entre sí. (Es decir, no existen raíces comunes entre A_o y B_o, ni entre P y L.) Definimos el polinomio característico como

$$A_{cl} \triangleq A_o L + B_o P. \tag{5}$$

Es fácil probar que A_{cl} (o un subconjunto de sus factores) aparece en el denominador de cada una de las funciones de sensibilidad. Las raíces del polinomio característico se llaman polos del lazo, pues definen los polos que aparecen en cada una de las funciones de sensibilidad.

3. Lazos bien definidos

En esta sección exploramos la primera condición mencionada en la enumeración de la sección introductoria.

Definition 1 *Considere el lazo realimentado de la Figura 1, donde G_o y C modelan sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLITs). Decimos que el lazo está bien definido si y sólo si G_o y C son propios*[1] *y las funciones de transferencia entre dos puntos cualquiera del lazo existen y son propias.* ■

Theorem 1 *Considere el lazo realimentado de la Figura 1, donde G_o y C son SLITs. El lazo resultante está bien definido si y sólo si G_o y C son propios, y $G_o(\infty)C(\infty) \neq -1$.* ■

Example 1 *Suponga que $C(s) = 1$ y $G_o(s) = -1$. En estas condiciones, la función de sensibilidad del lazo no existe. En efecto,*

$$S_o = \frac{1}{1 + G_o C} = \frac{1}{0}. \tag{6}$$

Concluimos que el lazo no está bien definido. En concreto, la interconexión entre G_o y C no define a un sistema que tenga sentido físico. La conclusión anterior es consistente con el Teorema 1.

Lo anterior admite un interpretación adicional: La planta, el controlador, y el punto de suma a la entrada del controlador, definen ecuaciones entre las variables involucradas que pueden no admitir solución simultánea para valores arbitrarios de las señales de entrada. De hecho, en este caso tenemos que (suponemos que $d_i = d_o = d_m = 0$)

$$y = -u \quad \textit{(planta)}, \tag{7}$$
$$u = e \quad \textit{(controlador)}, \tag{8}$$
$$e = r - y \quad \textit{(punto de suma)}. \tag{9}$$

Las ecuaciones anteriores no tienen sentido a menos que la referencia sea idénticamente nula. ■

Corollary 1 *Considere el lazo realimentado de la Figura 1, donde G_o y C son SLITs. Si G_o es estrictamente propia, entonces:*

1. *El lazo resultante está bien definido si y sólo si C es propio.*
2. *El lazo resultante está bien definido si y sólo si el grado relativo de T_o es mayor o igual al grado relativo de G_o.* ■

[1] En caso contrario, alguno de los bloques C ó G_o no sería realizable ni siquiera en forma individual y la interconexión de ellos malamente estará bien definida.

Example 2 *Suponga que*

$$G_o = \frac{1}{s^2+s+1}, \quad S_{io} = \frac{s}{s+1}. \tag{10}$$

Interesa establecer si el lazo resultante está bien definido. Como la planta es estrictamente propia, basta calcular el controlador y analizar su grado relativo:

$$S_{io} = \frac{G_o}{1+G_oC} \quad \Rightarrow \quad C = G_o^{-1}\left(\frac{G_o}{S_{io}} - 1\right) = -\frac{s^3+s^2-1}{s}. \tag{11}$$

El controlador es impropio y, por lo tanto, concluimos que el lazo no está bien definido.

Una manera más corta de llegar a la misma conclusión es la siguiente: Recuerde que $S_{io} = G_oS_o$. Suponga que el controlador es propio, entonces, dado que G_o es estrictamente propia, S_o debiese ser bipropia y el grado relativo de S_{io} debiese ser igual a dos (i.e., igual al grado relativo de la planta). La elección propuesta para S_{io} posee grado relativo cero y, por lo tanto, concluimos que el controlador no puede ser propio. En conclusión, el lazo no está bien definido. ■

4. Lazos estables

En esta sección exploramos la segunda condición mencionada en la enumeración de la sección introductoria.

Definition 2 *Considere el lazo realimentado de la Figura 1, donde G_o y C son SLITs. Suponga que el lazo está bien definido.*[2] *Decimos que el lazo es (internamente) estable si y sólo si para todo conjunto de entradas acotadas (i.e., r, d_o, d_i, d_m acotadas) y condiciones iniciales acotadas (en la planta y controlador), la actuación u y la salida y permanecen acotadas en el tiempo.* ■

Theorem 2 *Considere el lazo realimentado de la Figura 1, donde G_o y C son SLITs. Suponga que el lazo está bien definido. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El lazo cerrado es (internamente) estable.*
2. *El polinomio característico posee todas sus raíces en el plano izquierdo abierto, i.e., la parte real de todos los polos del lazo es (estrictamente) negativa.*
3. *Las cuatro funciones de sensibilidad S_o, T_o, S_{uo} y S_{io} son estables.*
4. *Alguna función de sensibilidad es estable y no existen polos inestables (resp. ceros de fase no mínima) de G_o que sean ceros de fase no mínima (resp. polos inestables) de C. (Es decir, al formar el producto G_oC no se producen cancelaciones (de polos ó ceros) inestables.)* ■

Example 3 *Suponga que*

$$G_o = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)(s-4)}, \quad C = \frac{s+2}{s-3}. \tag{12}$$

Interesa determinar si el lazo es estable o no. En este caso, el polinomio característico está dado por

$$\begin{aligned} A_{cl} &= (s-3)(s+1)(s+2)(s-4) + (s+2)(s-3) && (13)\\ &= (s+2)(s-3)\left((s+1)(s-4)+1\right) && (14)\\ &= (s+2)(s-3)(s-3{,}791)(s+0{,}7913). && (15) \end{aligned}$$

Resulta evidente que el lazo cerrado es inestable.

[2] Si éste no es el caso, entonces no tiene sentido evaluar la estabilidad del lazo.

Las cuatro funciones de sensibilidad del lazo son, en este caso, (verifique usando Matlab)

$$T_o = \frac{1}{(s-3{,}791)(s+0{,}7913)}, \quad S_o = \frac{(s-4)(s+1)}{(s-3{,}791)(s+0{,}7913)}, \tag{16}$$

$$S_{io} = \frac{(s-3)}{(s-3{,}791)(s+2)(s+0{,}7913)}, \quad S_{uo} = \frac{(s+2)(s+1)(s-4)}{(s-3)(s-3{,}791)(s+0{,}7913)}. \tag{17}$$

Nuevamente es evidente que el lazo es inestable pues las cuatro funciones de sensibilidad son inestables.

Note que los desarrollos anteriores son innecesariamente engorrosos para dar respuesta a la pregunta inicial: Dado que existen cancelaciones de polos y ceros inestables al formar el producto G_oC, es inmediato concluir que el lazo es inestable. En efecto, el cero de fase no mínima (i.e., cero inestable) en $s = 3$ de la planta es cancelado por el polo inestable del controlador y, como consecuencia de ello, aparece como raíz de uno de los factores del polinomio característico. ■

Corollary 2 *En las condiciones del Teorema 2 se cumple lo siguiente:*

1. $\{$*polos del lazo*$\}$ = $\{$*polos de alguna función de sensibilidad*$\}$ $\cup$ $\{$*polos y ceros cancelados al formar el producto* $G_oC\}$.
2. $\{$*polos* $T_o\}$ = $\{$*polos de* $S_o\}$.
3. $\{$*polos* $S_{io}\}$ = $\{$*polos de* $S_o\}$ $\cup$ $\{$*polos de la planta cancelados al formar el producto* $G_oC\}$
4. $\{$*polos* $S_{uo}\}$ = $\{$*polos de* $S_o\}$ $\cup$ $\{$*ceros de la planta cancelados al formar el producto* $G_oC\}$. ■

Example 4 *Suponga que*

$$G_o = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)}, \quad C = \frac{K(s+1)}{s}. \tag{18}$$

Determine los valores de K que hacen estable al lazo. Verifique las relaciones del corolario anterior para algún valor de K que estabilice al lazo.

En este caso,

$$A_{cl} = s(s+1)(s+3) + K(s+1)(s+5) = (s+1)(s^2 + (3+K)s + 5K). \tag{19}$$

Dado que un polinomio de orden dos posee todas sus raíces en el plano izquierdo abierto si y sólo si todos sus coeficientes tienen el mismo signo (y no falta ninguno), entonces concluimos que el lazo es estable si y sólo si $K > 0$.

Suponga que $K = 1$. Entonces, $A_{cl} = (s+1)(s^2+4s+5)$ y

$$T_o = \frac{(s+5)}{(s^2+4s+5)}, \quad S_o = \frac{s(s+3)}{(s^2+4s+5)}, \tag{20}$$

$$S_{io} = \frac{s(s+5)}{(s+1)(s^2+4s+5)}, \quad S_{uo} = \frac{(s+3)(s+1)}{(s^2+4s+5)}. \tag{21}$$

Vemos que los polos y ceros cancelados (en este caso el polo en $s = -1$ de la planta) no aparecen en los denominadores de T_o, S_o, ni S_{uo}. Sin embargo, aparecen en el denominador de S_{io}. Lo anterior es consistente con el corolario anterior. ■

Corollary 3 *En las condiciones del Teorema 2, tendremos estabilidad (interna) si y sólo si T_o es estable, posee como ceros a todos los ceros de fase no mínima de G_o y de C (con la misma multiplicidad) y, además, $S_o = 1 - T_o$ posee como ceros a todos los polos inestables de G_o y de C (con la misma multiplicidad).* ■

Example 5 *Suponga que la planta*

$$G_o = \frac{(-s+5)^2}{(s^2+3s+1)(s+5)(s+10)} \tag{22}$$

debe controlarse mediante un lazo como el de la Figura 1. Determine todas las condiciones que debe cumplir la función de sensibilidad complementaria de un lazo estable y bien definido.

La planta posee grado relativo dos. Por lo tanto, para garantizar que el lazo esté bien definido T_o debe tener grado relativo mayor o igual a dos. Para garantizar la estabilidad del lazo, T_o debe ser estable y no deben haber cancelaciones inestables al formarse el producto G_oC. Esta última condición es equivalente a la condición dada en el corolario anterior. En otras palabras, no habrán cancelaciones inestables al formarse el producto G_oC si y sólo si T_o posee dos ceros en $s = 5$. (Note que G_o es estable y, por lo tanto, no es posible que existan cancelaciones de polos inestables de la planta.) En consecuencia, todas las funciones de sensibilidad complementaria admisibles pueden escribirse como

$$T_o = (s-5)^2 \bar{T}_o, \tag{23}$$

donde $\bar{T}_o$ es cualquier función de transferencia estable con grado relativo mayor o igual a cuatro. ■

5. Seguimiento de la referencia

En esta sección exploramos la tercera condición mencionada en la enumeración de la sección introductoria.

La ecuación (1) puede interpretarse gráficamente como se indica en la Figura 2. Resulta entonces evidente que, si el lazo es estable y está bien definido, entonces $y \approx r$ en estado estacionario si

$$\begin{array}{rl} T_o(j\omega) \approx 1 & \text{en las frecuencia en que la referencia } r \text{ es significativa,} \\ T_o(j\omega) \approx 0 & \text{en las frecuencia en que el ruido de medición } d_m \text{ es significativo,} \\ S_o(j\omega) \approx 0 & \text{en las frecuencia en que la perturbación de salida } d_o \text{ es significativa,} \\ S_{io}(j\omega) \approx 0 & \text{en las frecuencia en que la perturbación de salida } d_i \text{ es significativa.} \end{array} \tag{24}$$

Note que:

- Las condiciones anteriores están dadas sobre las funciones de sensibilidad, no sólo sobre sus magnitudes.
- Dado que $S_o = 1 - T_o$ y $S_{io} = G_oS_o$ (para todo valor de s y, en particular, para $s = j\omega$), las condiciones impuestas por la referencia y las perturbaciones son siempre compatibles.
- Sin embargo, y dadas las razones anteriores, las condiciones impuestas por el ruido de medición podrían ser contradictorias con las condiciones impuestas por referencia y perturbaciones. Las condiciones impuestas por el ruido de medición no serán contradictorias con las impuestas por referencia y perturbaciones, si es que el ruido tiene energía en bandas de frecuencia que no coinciden con las de la referencia y perturbaciones.
- En general, las perturbaciones y referencias poseen energía en baja frecuencia, y el ruido de medición en alta frecuencia. Por lo tanto, T_o será usualmente de característica pasabajos, con un ancho de banda suficientemente ancho para cubrir el espectro de referencia y perturbaciones, pero suficientemente angosto para que el ruido de medición esté contenido en su banda de rechazo (i.e., en la banda de frecuencias en que T_o es pequeña en magnitud).
- Aún en los casos en que el ruido de medición sea despreciable, no es conveniente considerar funciones de sensibilidad complementaria con ancho de banda excesivamente mayor al ancho de banda de la planta. De hecho, dado que $S_{uo} = T_o/G_o$, si T_o posee un ancho de banda mucho mayor al de la planta, S_{uo} poseerá alta ganancia en altas frecuencias. Esto implica actuaciones con transientes vigorosos y de gran magnitud. (Esta situación podría no ser compatible con limitaciones prácticas sobre las magnitudes admisibles para u.)

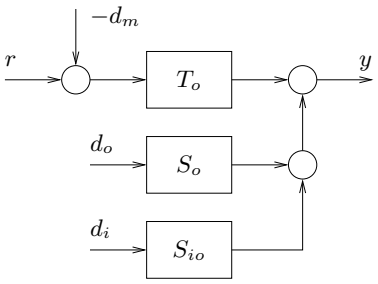

Figura 2: Relación entre las excitaciones del lazo y la salida y.

Example 6 *Suponga que*

$$G_o = \frac{1}{s+2}, \quad C = \frac{K(s+a)}{s}. \tag{25}$$

Elija valores para α y K de modo de poder compensar perturbaciones de salida de frecuencia 1 rad/s, seguir referencias constantes, y eliminar el efecto de ruido de medición de frecuencia superior a 10 rad/s.

En primer lugar hay que garantizar que el lazo sea estable y esté bien definido. El lazo está bien definido para todo valor de K y a. Por otra parte, el polinomio característico es $A_{cl} = s(s+2)+K(s+a) = s^2+(2+K)s+aK$. Por lo tanto, el lazo será estable si y sólo si $aK > 0$ y $K > -2$. Por simplicidad elegimos $a = 2$ (así forzamos una cancelación estable entre planta y controlador y los cálculos se simplifican), lo que implica que

$$T_o = \frac{K}{s+K}, \quad K > 0. \tag{26}$$

Esta elección para T_o corresponde a un filtro pasabajos, con ganancia a continua unitaria, y ancho de banda igual a K. Por lo tanto, se debe elegir $1 < K < 10$.

La Figura 3(a) muestra la salida y de la planta cuando $r = 1$, $d_o = \sin t$, y $d_m = 0.1 \sin 10t$, para $K \in \{2, 6, 9\}$. El desempeño dista de ser ideal, pero se aprecia claramente el efecto de las distintas elecciones para K: A mayor K, mayor ancho de banda del lazo, lo que se traduce en mejor compensación de perturbaciones, y peor compensación del ruido de medición. Asimismo, la Figura 3(b) muestra la actuación u en las mismas condiciones. Se observa que, en todos los casos, la actuación estacionaria es de similar magnitud. Sin embargo, su magnitud inicial aumenta a medida que K aumenta. Este comportamiento es consistente con la discusión teórica anterior: A medida que el ancho de banda del lazo (i.e., de T_o) se hace mayor que el de la planta, la actuación (inicial) se hace más vigorosa. ■

Example 7 *Suponga que*

$$G_o = \frac{-s+4}{s^2+5{,}6s+16}, \quad C = \frac{0{,}29853(s-0{,}09142)(s-188{,}6)(s^2+4{,}181s+9{,}712)}{s(s^2+9)(s+18{,}7)}. \tag{27}$$

Evidentemente el lazo resultante está bien definido. Ud. puede verificar (use Matlab, "a mano" es larguísimo...) que el lazo resultante es estable, con polos de lazo cerrado en $-0{,}5 \pm 0{,}86603j, -10, -10, -2, -1$. Suponga, además, que $r = 2 + \cos(3t - \pi/3)$, $d_i = K$, $d_o = A\sin(3t)$, y que el ruido de medición es despreciable. Calcule y en estado estacionario.

En principio, basta con calcular las funciones de sensibilidad del lazo, y evaluar su respuesta en frecuencia a frecuencias $\omega \in \{0, 3\}$. (Note, sin embargo, que en este caso no es razonable hacer estos cálculos "a mano" pues G_o y C son de alto orden.) Una alternativa se presenta a continuación: Dado que el controlador posee polos en $s = 0$ y $s = \pm 3j$, es evidente que[3]

$$T_o(0) = \lim_{s\to 0} \frac{G_o C}{1 + G_o C} = 1, \quad T_o(\pm 3j) = \lim_{s\to \pm 3j} \frac{G_o C}{1 + G_o C} = 1. \tag{28}$$

[3]Tomamos límites para evitar formas indeterminadas. Implícitamente suponemos, y es de hecho así dados resultados fundamentales del álgebra, que las sensibilidades son funciones continuas para todo valor de s que no corresponda a un polo de ellas.

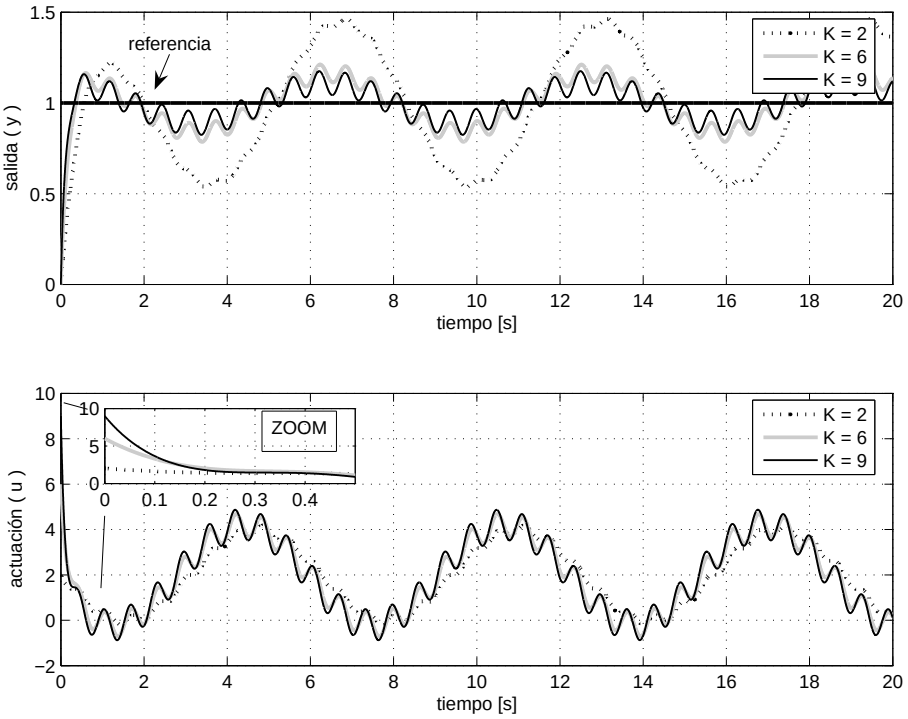

Figura 3: Respuesta del lazo propuesto en el Ejemplo 6 para diferentes valores de K.

Por lo tanto,

$$S_{io}(0) = 0, \quad S_o(\pm 3j) = 0. \tag{29}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= T_o(0) \times 2 + |T_o(3j)| \times \cos(3t - \pi/3 + \angle T_o(3j)) \\ &\qquad + |S_o(3j)| \times A \sin(3t + \angle S_o(3j)) + S_{io}(0) \times K \qquad (30) \\ &= 2 + \cos(3t - \pi/3) \qquad (31) \\ &= r. \qquad (32) \end{aligned}$$

La Figura 4 muestra el error de seguimiento, i.e., la señal $e \triangleq r - y$, en las condiciones anteriores. Como se anticipó, se observa un seguimiento estacionario perfecto de la referencia.

Este ejemplo ilustra el punto siguiente: Si un lazo es estable y está bien definido, y el controlador posee ganancia infinita a frecuencia $\omega = \omega_o$ (i.e., al menos un par de polos complejos conjugados en $s = \pm j\omega_o$, ó al menos un polo en $s = 0$ si $\omega_o = 0$), entonces el lazo compensará perfectamente perturbaciones de entrada y salida de frecuencia ω_o, y seguirá perfectamente las componentes de frecuencia ω_o de la referencia. (¡Inversión perfecta (a frecuencia ω_o) necesita controlador de ganancia infinita (a frecuencia ω_o)!) ■

Ejercicio 1 *Suponga que*

$$G_o(s) = \frac{1}{s}, \quad C = 3, \tag{33}$$

$r = K_1$, $d_i = K_2$, $d_o = K_3$, $d_m = 0$. Calcule la respuesta y la actuación estacionaria del lazo. Verifique usando Matlab. Explique la relación existente entre su respuesta y los comentarios hechos al final del ejemplo anterior. ■

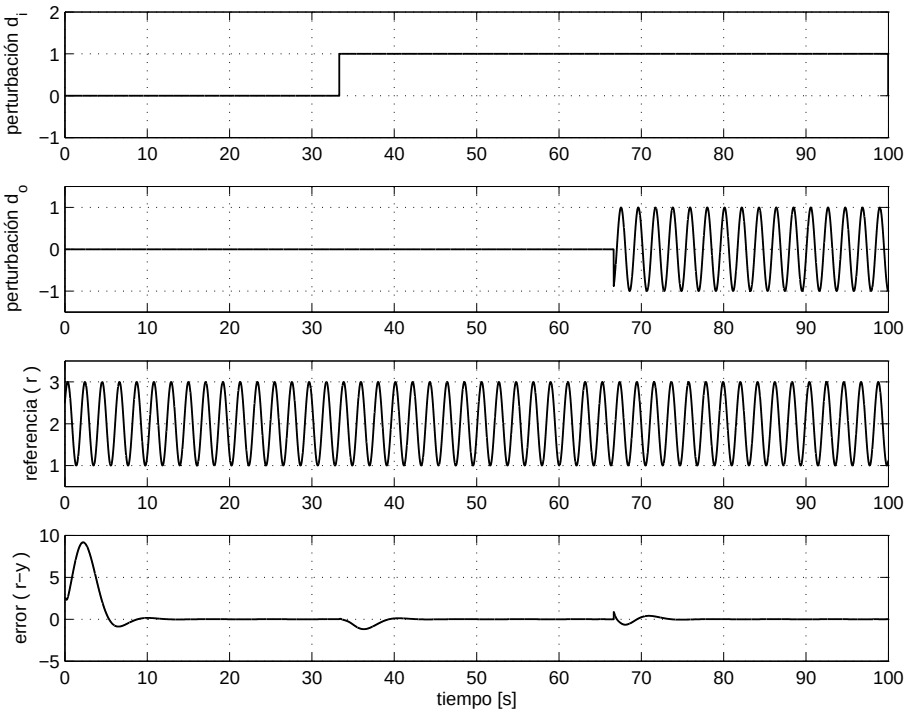

Figura 4: Respuesta del lazo propuesto en el Ejemplo 7.