Solución Primer Certamen de Teoría de Redes II (ELO-103)

16 de Septiembre de 2009

Generalidades

- El certamen es de carácter **individual**. Copiar conlleva la reprobación automática del ramo entre otras medidas reglamentarias.
- Sólo puede utilizar el **formulario oficial, lápiz y papel**. Violaciones de esta regla serán consideradas copia.
- Responda cada problema en **hojas separadas y justifique en forma cuidadosa**.
- Todas las magnitudes de tensiones y corrientes corresponden a valores máximos (amplitudes).
- Tiempo: **90 minutos**.

Problema 1 (20 puntos) Considere un generador trifásico balanceado que entrega 1000 [V] entre líneas, en secuencia ABC. Suponga que se conectan al generador dos cargas balanceadas. La primera en estrella con impedancia $\underset{\cdot}{Z}_1 = (1+j)[\Omega]$ por fase, y la segunda en delta (triángulo) con impedancia $\underset{\cdot}{Z}_2 = -3j[\Omega]$ por fase.

1. **(15 puntos)** Calcule la amplitud de las corrientes de línea a la salida del generador.

2. **(5 puntos)** Calcule la potencia media absorbida por la segunda carga.

Solución del Problema 1

1. El circuito equivalente por fases de la situación considerada es

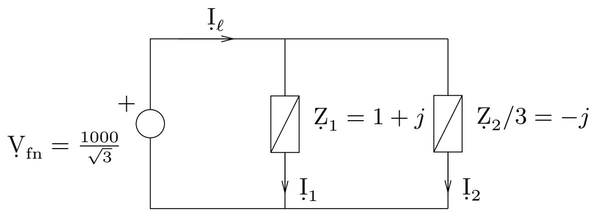

Figure 1: Equivalente por fases para el Problema 1.

Por lo tanto,

$$\underset{\cdot}{I}_\ell = \frac{\underset{\cdot}{V}_{\text{fn}}\left(\underset{\cdot}{Z}_1 + \frac{\underset{\cdot}{Z}_2}{3}\right)}{\underset{\cdot}{Z}_1\frac{\underset{\cdot}{Z}_2}{3}} = \frac{1000}{\sqrt{3}}\,\frac{1+j-j}{(1+j)(-j)} = \frac{1000}{\sqrt{6}}e^{j\theta},$$

con θ apropiado. Por lo tanto, la amplitud de la corriente de línea del generador es de $\frac{1000}{\sqrt{6}}$.

2. Dado que la segunda carga es puramente capacitiva, la potencia media absorbida por ella es nula.

Problema 2 (25 puntos) Dos cargas trifásicas balanceadas se conectan a un generador trifásico balanceado que entrega $80/\sqrt{3}[V]$ entre líneas. El generador entrega un total de $50[W]$ con factor de potencia capacitivo, la primera carga consume $40[W]$ con factor de potencia $4/5$ capacitivo, y la corriente de línea a la salida del generador tiene una amplitud de $2.5[A]$. Determine la potencia compleja (i.e., $\underset{\cdot}{\mathrm{P}}_{3\phi}$) absorbida por la segunda carga y el factor de potencia correspondiente.

Solución del Problema 2

Primera solución.

En este caso el circuito equivalente por fases está dado por

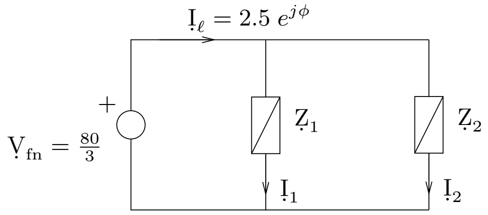

Figure 2: Equivalente por fases para el Problema 2.

Note que en la figura se ha definido el ángulo de la corriente de línea a la salida del generador como ϕ. Dado que el factor de potencia total $\mathrm{FP}_{\text{total}}$ es capacitivo, sabemos que $\phi > 0$. Asimismo, el ángulo de $\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1$ también es positivo, por la misma razón. Por lo tanto,[1]

$$P_{\text{act,total}} = \frac{3}{2} V_{\text{fn}} I_\ell \cos(-\phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = \arccos\left(\frac{2P_{\text{act,total}}}{3V_{\text{fn}} I_\ell}\right) \quad \Rightarrow \quad \underset{\cdot}{\mathrm{I}}_\ell = I_\ell e^{j \arccos\left(\frac{2P_{\text{act,total}}}{3V_{\text{fn}} I_\ell}\right)},$$

$$P_{\text{act},1} = \frac{3}{2} V_{\text{fn}} I_1 \,\mathrm{FP}_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{2P_{\text{act},1}}{3V_{\text{fn}}\,\mathrm{FP}_1} \quad \Rightarrow \quad \underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1 = \frac{2P_{\text{act},1}}{3V_{\text{fn}}\,\mathrm{FP}_1} e^{j \arccos \mathrm{FP}_1}.$$

Con lo valores numéricos dados llegamos a

$$\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_\ell = \frac{5}{2} e^{j\pi/3}, \quad \underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1 = \frac{5}{4} e^{j \arccos 4/5}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_2 &= \underset{\cdot}{\mathrm{I}}_\ell - \underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1 \\
&= \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{5}{4}\left(\frac{4}{5} + j\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{4} + j\left(\frac{5\sqrt{3}-3}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{5\sqrt{3}-3}{4}\right)^2}\, e^{j \arctan\left(5\sqrt{3}-3\right)}.
\end{aligned}$$

Como $\arctan(5\sqrt{3}-3) > 0$, tenemos que el ángulo de la impedancia equivalente vista por el generador, digamos α, es negativo e igual a $-\left(\arctan 5\sqrt{3} - 3\right)$. Por lo tanto, la potencia compleja buscada está

[1] $P_{\text{act,total}}$ corresponde a la potencia activa total entregada por el generador, $P_{\text{act},i}$ corresponde a la potencia activa absorbida por la impedancia $\underset{\cdot}{\mathrm{Z}}_i$, y FP_i corresponde al factor de potencia correspondiente. También usamos la convención de que X denota la magnitud del fasor $\underset{\cdot}{\mathrm{X}}$.

dada por

$$
\begin{aligned}
\underset{\cdot}{\mathrm{P}}_{3\phi,2} &= \frac{3}{2} V_{\mathrm{fn}} I_2 \left(\cos\alpha - j\sin\alpha\right) \\
&= 40\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{5\sqrt{3}-3}{4}\right)^2}\,\Big(\cos\arctan(5\sqrt{3}-3) - j\sin\arctan(5\sqrt{3}-3)\Big)
\end{aligned}
$$

y el factor de potencia correspondiente es $\mathrm{FP}_2 = \cos\arctan(5\sqrt{3}-3)$, capacitivo.

Segunda solución.

Con los datos del problema resulta inmediato concluir que la potencia compleja absorbida por la primera carga $\underset{\cdot}{\mathrm{P}}_{3\phi,1}$ está dada por

$$\underset{\cdot}{P}_{3\phi,1} = 40 - 40 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} j = 40 - 30j$$

(note que el signo de la parte imaginaria se debe a que el factor de potencia de la primera carga es capacitivo). Asimismo, el factor de potencia total "visto" por el generador $\mathrm{FP}_{\mathrm{total}}$ puede calcularse como sigue:

$$P_{\mathrm{act,total}} = \frac{3}{2} V_{\mathrm{fn}} I_\ell \cos(\phi) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{FP}_{\mathrm{total}} = \cos(\phi) = \frac{2P_{\mathrm{act,total}}}{3V_{\mathrm{fn}} I_\ell} = \frac{1}{2},$$

capacitivo. Por lo tanto, la potencia compleja total entrega por el generador está dada por

$$\underset{\cdot}{P}_{3\phi,\mathrm{total}} = 50 - 50 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} j = 50 - 50\sqrt{3}j$$

(de nuevo, note el signo de la parte compleja). Por lo tanto, la potencia compleja buscada está dada por

$$
\begin{aligned}
\underset{\cdot}{P}_{3\phi,2} = \underset{\cdot}{P}_{3\phi,\mathrm{total}} - \underset{\cdot}{P}_{3\phi,1} &= 10 - \Big(50\sqrt{3} - 30\Big) j \\
&= 40\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{5\sqrt{3}-3}{4}\right)^2}\,\Big(\cos\arctan(5\sqrt{3}-3) - j\sin\arctan(5\sqrt{3}-3)\Big),
\end{aligned}
$$

y el factor de potencia está dadao por $\cos\arctan(5\sqrt{3}-3)$, capacitivo.

Problema 3 (25 puntos) Considere la red de la figura, donde $v_c(0_-) = 1[V]$, $i_L(0_-) = 0[A]$, $V_f = \mu(t)[V]$, $R_1 = 2[\Omega]$, $L = 1/4[H]$, $C = 21/16[F]$ y $R_2 = 22/21[\Omega]$. Determine en forma explícita $i(t)$ para $t \geq 0$.

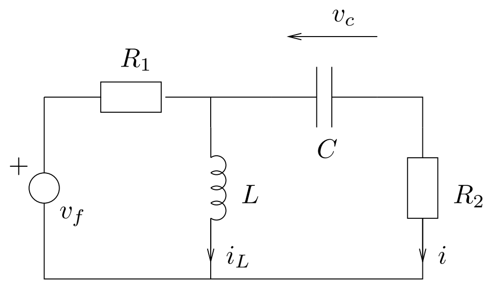

Figure 3: Red considerada en el Problema 3.

Solución del Problema 3 Dadas la condiciones iniciales para i_L y v_c, tenemos que el equivalente en el plano de Laplace de la red considerada está dado por

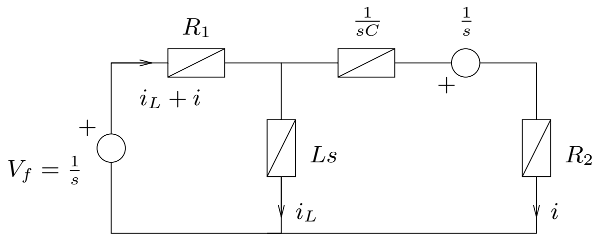

Figure 4: Equivalente en el plano de Laplace de la red del Problema 3.

Por lo tanto,

$$\frac{1}{s} = Lsi_L + R_1(i_L + i),$$
$$\frac{1}{s} = R_2 i + \frac{1}{s} + \frac{1}{sC} i + R_1(i_L + i)$$

Usando notación matricial, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ls + R_1 & R_1 \\ R_1 & R_1 + R_2 + \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ i \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} i_L \\ i \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{sC} & -R_1 \\ -R_1 & Ls + R_1 \end{bmatrix}}{(Ls + R_1)\left(R_2 + R_1 + \frac{1}{sC}\right) - R_1^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow i = \frac{1}{(Ls + R_1)\left(R_2 + R_1 + \frac{1}{sC}\right) - R_1^2} \left(\frac{-R_1}{s} \right) = \frac{-CR_1}{(R_1 + R_2)CLs^2 + (L + R_1 R_2 C)s + R_1}.$$

Con los valores numéricos dados, tenemos

$$i = \frac{\frac{-21}{8}}{(s+1)(s+2)} = \frac{-21}{8} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{-21}{8} \left(e^{-t} - e^{-2t} \right) \mu(t).$$

Problema 4 (30 puntos) Considere la red de la figura y suponga que ambos amplificadores operacionales son ideales.

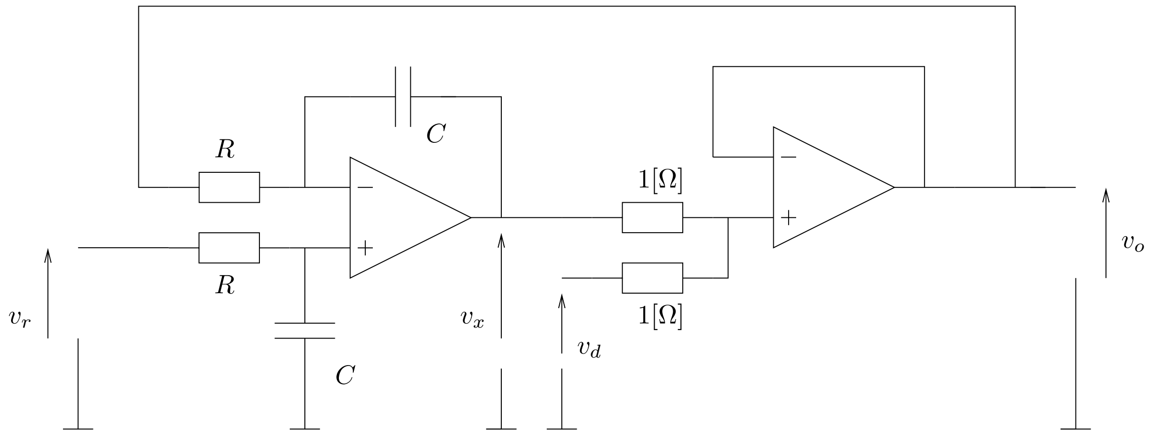

Figure 5: Red considerada en el Problema 4.

1. **(10 puntos)** Calcule la función de transferencia entre v_r, v_d y v_o. O sea, calcule funciones de transferencias H_r y H_d tales que $v_o = H_r v_r + H_d v_d$. (**Sugerencia:** Calcule primero v_x en función de v_o y v_r.)
2. **(7.5 puntos)** Suponga que $RC = 0.5[\Omega F]$, $v_r = \mu(t)[V]$, $v_d = -\mu(t)[V]$, y que las condiciones iniciales son cero. Calcule explícitamente $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
3. **(7.5 puntos)** Suponga que v_r y v_d son constantes. Demuestre que, independientemente de las condiciones iniciales, de los valores de v_r y v_d, y del valor de RC ($RC > 0$), $\lim_{t\to\infty} v_o(t) = v_r$.
4. **(5 puntos)** Suponga que v_r y v_d son constantes. ¿Qué efecto tiene la elección de $RC > 0$ en la tensión de salida $v_o(t)$?

Solución del Problema 4

1. Analizaremos cada uno de los amplificadores operacionales por separado. Luego, usaremos las ecuaciones correspondientes para escribir la relación buscada.

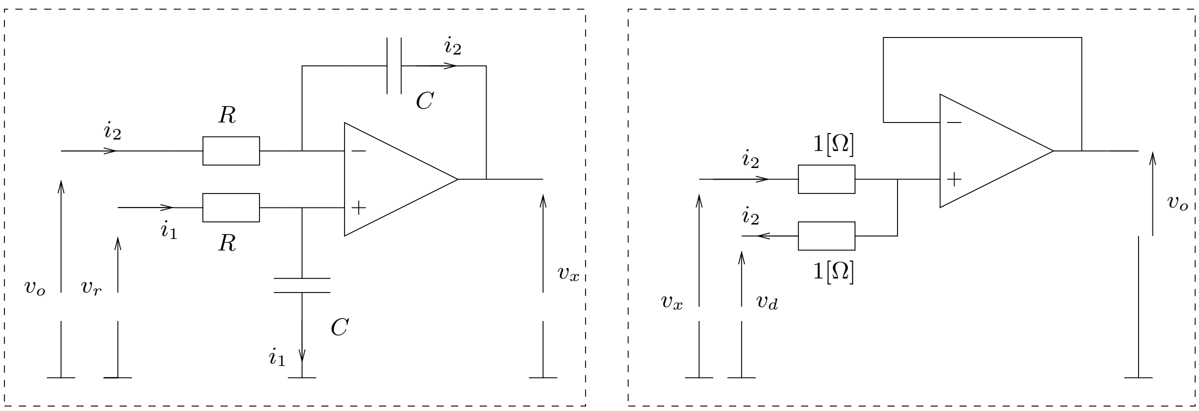

Figure 6: Circuitos aislados asociados a cada uno de los amplificadores operacionales del Problema 4.

En el circuito de la izquierda tenemos

$$v_r = \left(\frac{1}{sC} + R\right) i_1, \quad v_o = \frac{1}{sC} i_1 + R i_2, \quad v_o = v_x + \left(\frac{1}{sC} + R\right) i_2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_o &= \frac{1}{sC} \frac{1}{\left(\frac{1}{sC} + R\right)} v_r + R \frac{(v_o - v_x)}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{1}{RCs + 1} v_r + \frac{RCs}{RCs + 1} (v_o - v_x) \\ \Rightarrow \quad v_x &= \frac{1}{RCs} (v_r - v_o) . \end{aligned} \tag{1}$$

En el circuito de la derecha tenemos

$$v_d + i_2 = v_o, \quad v_x = v_o + i_2 \quad \Rightarrow \quad v_o = \frac{1}{2} (v_x + v_d) . \tag{2}$$

De (1) y (2) tenemos

$$\begin{aligned} v_o &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{RCs} (v_r - v_o) + v_d \right) \quad \Rightarrow \quad v_o \left(1 + \frac{1}{2RCs}\right) = \frac{1}{2RCs} v_r + \frac{v_d}{2} \\ \Rightarrow \quad v_o &= \frac{1}{2RCs + 1} v_r + \frac{RCs}{2RCs + 1} v_d, \end{aligned} \tag{3}$$

ecuación que constituye la relación buscada.

2. Con lo valores numéricos dados, (3) se reduce a

$$v_o = \left(\frac{1}{s+1}\right) \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s+1}\right) \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1.5}{s+1} \quad \Rightarrow \quad v_o(t) = \left(1 - 1.5e^{-t}\right) \mu(t).$$

3. Para $RC > 0$ el sistema es estable. Además, las entradas son constantes. Por lo tanto, podemos utilizar la respuesta en frecuencia a frecuencia $\omega = 0$ del circuito para determinar v_o en estado estacionario. Suponga que el valor de v_r es K_r, y el de v_d es K_d. Entonces, (3) permite escribir

$$\lim_{t \to \infty} v_o(t) = \left. \frac{1}{2RCs + 1} \right|_{s=0} K_r + \left. \frac{RCs}{2RCs + 1} \right|_{s=0} K_d = K_r.$$

En consecuencia, independientemente de las condiciones iniciales, del valor de $RC > 0$, y de las magnitudes de v_r y v_d, el valor estacionario de v_o es siempre igual al valor de la tensión v_r.

4. El valor de RC define la ubicación del polo de las funciones de transferencia en (3). Por lo tanto, RC define la velocidad con que los modos naturales decaen y, en consecuencia, la velocidad con que v_o converge a v_r.
