Solución Segundo Certamen de Teoría de Redes II (ELO-103)

05 de Noviembre de 2009

Generalidades

- El certamen es de carácter **individual**. Copiar conlleva la reprobación automática del ramo entre otras medidas reglamentarias.
- Sólo puede utilizar el **formulario oficial, lápiz y papel**. Violaciones de esta regla serán consideradas copia.
- Responda cada problema en **hojas separadas y justifique en forma cuidadosa**.
- Tiempo: **90 minutos**.

Problema 1 Un *girador* es un dispositivo con dos puertos cuya impedancia de entrada Z_i está relacionada con la impedancia de carga Z_L a través de la relación $Z_i = \frac{a^2}{Z_L}$. Gráficamente, la situación se ilustra en la figura siguiente:

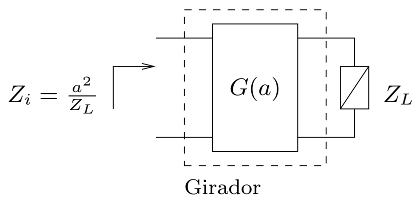

Figure 1: Girador.

1. Determine la caracterización T de la red de la figura siguiente suponiendo que el transformador es ideal (note que la respuesta no es necesariamente única):

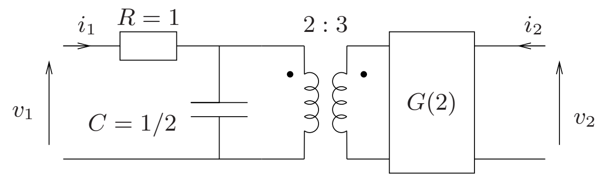

Figure 2: Red considerada en la Parte 1 del Problema 1.

2. Demuestre o refute la siguiente afirmación: Si una red recíproca con caracterización T se conecta en cascada con un girador, entonces la red resultante no será recíproca.

Solución del Problema 1

1. *Para el girador aislado de la figura siguiente,*

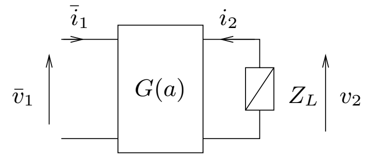

Figure 3: Girador aislado.

la matriz de transmisión T está dada por

$$T_G = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Z_i \triangleq \frac{\bar{v}_1}{\bar{i}_1} = \frac{T_{11}v_2 - T_{12}i_2}{T_{21}v_2 - T_{22}i_2} = \frac{T_{11}Z_L + T_{12}}{T_{21}Z_L + T_{22}} = \frac{a^2}{Z_L} = \frac{4}{Z_L}.$$

Por lo tanto, una elección de parámetros T posible está dada por

$$T_G = \begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por su parte, para el transformador ideal tenemos

$$T_T = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, consideramos la red de la izquierda:

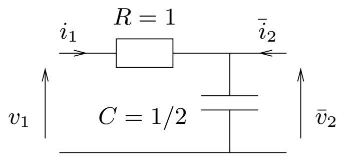

Figure 4: Red de la izquierda aislada.

Tenemos

$$v_1 = \frac{2}{s}(i_1 + \bar{i}_2) + i_1, \quad \bar{v}_2 = \frac{2}{s}(i_1 + \bar{i}_2) \quad \Rightarrow \quad Z_R = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s} & \frac{2}{s} \\ \frac{2}{s} & \frac{2}{s} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_R = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{2} & 1 \\ \frac{s}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

donde Z_R y T_R corresponden a las caracterizaciones Z y T de la red de la izquierda, respectivamente. En consecuencia, la caracterización T de la red completa está dada por

$$T_{TOTAL} = T_R T_T T_G = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{4(s+2)}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{4s}{3} \end{bmatrix}.$$

2. *Si T_G es la caracterización T del girador y T_R es la caracterización T de la red recíproca R, entonces la caracterización T de la red resultante satisface*

$$T_{TOTAL} = T_R T_G \quad \Rightarrow \quad \det(T_{TOTAL}) = \det(T_R)\det(T_G) = \det(T_G) = -a^2,$$

donde se ha usado el que la red R es recíproca y la primera parte de la respuesta anterior. Como $-a^2 \neq 1$ para cualquier a real, concluimos que la red resultante no es recíproca. Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

Problema 2 Considere la señal

$$v_i(t) = 3 + \sin(2t + \pi/3) + 0.5\sin(20t + \pi/16).$$

Esta señal debe filtrarse de modo de eliminar la componente de mayor frecuencia. Para ello, se debe diseñar un filtro tal que

$$A_0 \geq 0.8 \cdot 3 \quad \text{y} \quad \frac{A_{20}}{A_2} \leq 0.05,$$

donde A_ω corresponde a la amplitud estacionaria de la componente de frecuencia ω a la salida del filtro. Se proponen cuatro filtros (obviamente estables) cuyas respuestas en frecuencia se han graficado en la figura siguiente:

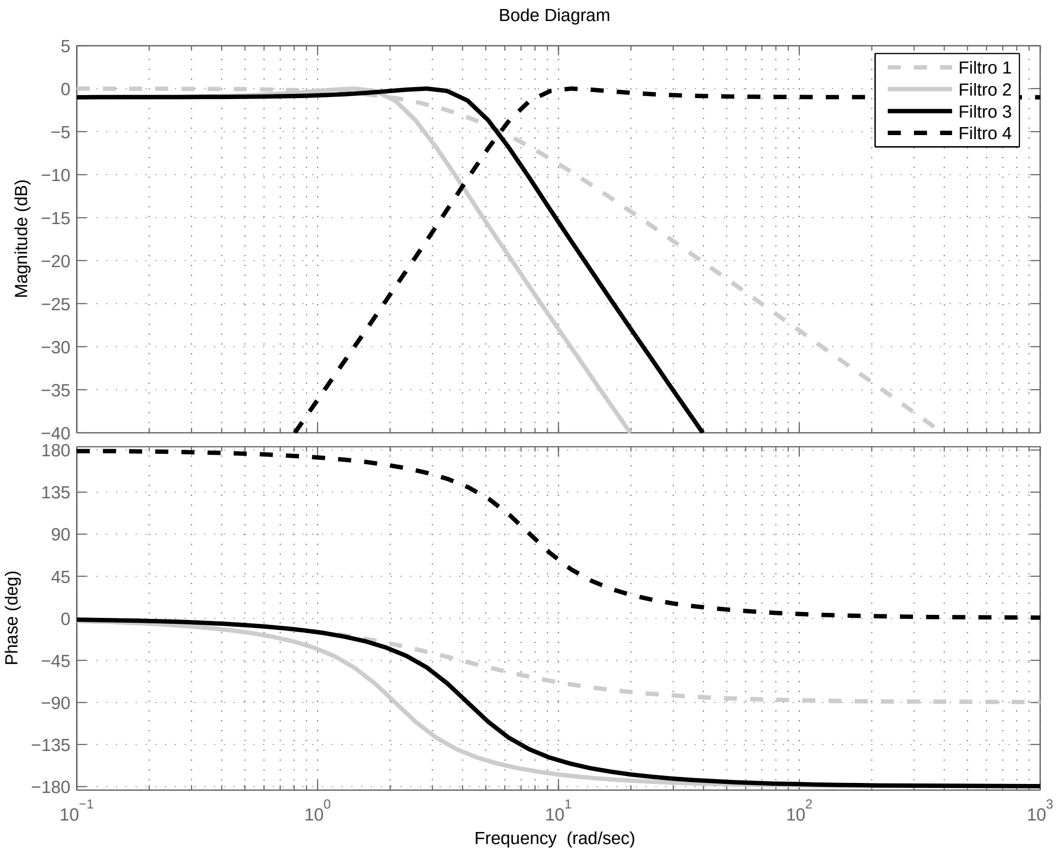

Figure 5: Respuestas en frecuencia consideradas en el Problema 2.

1. Determine el (los) filtro(s) que satisface(n) las especificaciones.
2. Determine (en forma aproximada) la respuesta estacionaria del Filtro 1, cuando la entrada es igual a v_i.

Solución del Problema 2

1. *La primera condición implica que la magnitud del filtro ha de ser mayor a 0.8 para frecuencia $\omega = 0$. Por lo tanto, $20\log_{10}|F_i(0)| \geq 20\log_{10}(0.8) \approx (3\cdot 0.3 - 1)\cdot 20 = -2[dB]$. Claramente, los Filtros 1,2 y 3 satisfacen esta especificación. La segunda especificación es equivalente a*

$$20\log_{10} A_{20} \leq 20\log_{10}(0.05) + 20\log_{10} A_2. \tag{1}$$

Además, sabemos que $A_2 = 1\cdot|F_i(2j)|$ y que $A_{20} = 0.5\cdot|F_i(20j)|$. Por lo tanto, la condición anterior puede expresarse como

$$20\log_{10}(0.5\,|F_i(20j)|) \leq 20\log_{10}(0.05) + 20\log_{10}|F_i(2j)| \tag{2}$$

lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|F_i(20j)| &\leq 20\log_{10}|F_i(2j)| + 20\log_{10}(0.05) - 20\log_{10}0.5 \\ &\approx 20\log_{10}|F_i(2j)| + 20\cdot(0.3+0.7-2) = 20\log_{10}|F_i(2j)| - 20[dB] \end{aligned} \tag{3}$$

De la figura se observa que los Filtros 2 y 3 satisfacen esta especificación. Por lo tanto, los Filtros 2 y 3 son los únicos filtro que satisfacen TODAS las especificaciones.

2. *Como el Filtro 1 es estable, se puede utilizar el diagrama de Bode de la figura y el principio de superposición para concluir que, en estado estacionario,*

$$\begin{aligned} v_o(t) &= 3F_1(0) + |F_1(2j)|\sin(2t + \pi/3 + \angle F_1(2j)) + 0.5\,|F_1(20j)|\sin(2t+\pi/16+\angle F_1(20j)) \\ &\approx 3 + 10^{-1/20}\sin(2t+\pi/3-\pi/6) + 0.5\cdot 10^{-15/20}\sin(2t+\pi/16-75\pi/180). \end{aligned}$$

Problema 3 Considere la red de la figura, donde la matriz de transmisión T y las impedancias Z_i y Z_L están dadas por

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{s}{s+3} \\ 1 & \frac{s+2}{s+3} \end{bmatrix}, \qquad Z_i = Z_L = 1.$$

1. Determine, si existe, el equivalente Thévenin "visto" hacia la izquierda de los terminales A y B.
2. Determine la función de transferencia entre v_i y v_o.

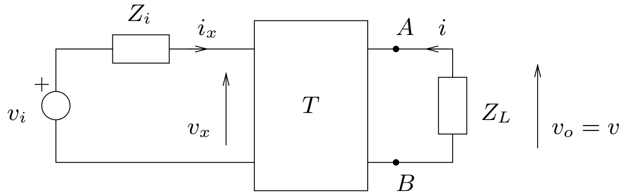

Figure 6: Red considerada en el Problema 3.

Solución del Problema 3

1. *Usando la definición de variables de la figura tenemos que, si los terminales A y B están abiertos, entonces (recuerde que $Z_i = 1$ y note que T_{ij} corresponde al elemento ij de la matriz T)*

$$\begin{aligned} & v_i = v_x + i_x, \quad v_x = T_{11}v - T_{12}i, \quad i_x = T_{21}v - T_{22}i \\ \Rightarrow \quad & v_i = v_x + i_x = (T_{11}+T_{21})v - (T_{12}+T_{22})i \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{T_{11}+T_{21}}v_i + \frac{T_{12}+T_{22}}{T_{11}+T_{21}}i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el voltaje Thévenin v_{TH} y la impedancia Thévenin Z_{TH} están dados por

$$v_{TH} = \frac{1}{T_{11} + T_{21}} v_i, \quad Z_{TH} = \frac{T_{12} + T_{22}}{T_{11} + T_{21}}.$$

2. *Usando el equivalente Thévenin obtenido en la parte anterior es inmediato concluir que (recuerde que $Z_L = 1$)*

$$v_o = \frac{v_{TH} Z_L}{Z_L + Z_{TH}} = \frac{1}{T_{11} + T_{21} + T_{12} + T_{22}} v_i \quad \Rightarrow \quad \frac{v_i}{v_o} = \frac{1}{T_{11} + T_{21} + T_{12} + T_{22}}.$$

Problema 4 Considere la red de dos puertos de la figura. Elija Ud. alguna caracterización (Z, Y, H, G ó T) que esté bien definida y calcúlela.

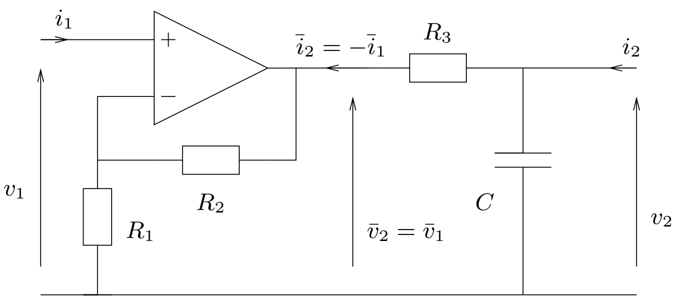

Figure 7: Red del Problema 4.

Solución del Problema 4 *Considerando la red de la izquierda en forma aislada, y usando la definición de variables de la figura, tenemos que*

$$i_1 = 0, \quad v_1 = \frac{\bar{v}_2 R_1}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+R_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde T_1 corresponde a la matriz de transmisión correspondiente. Para la red de la derecha tenemos

$$\bar{v}_1 = \left(\frac{1}{sC} + R_3\right)\bar{i}_1 + \frac{1}{sC}i_2, \quad v_2 = \frac{1}{sC}\bar{i}_1 + \frac{1}{sC}i_2$$

$$\Rightarrow Z_2 = \begin{bmatrix} \frac{R_3Cs+1}{sC} & \frac{1}{sC} \\ \frac{1}{sC} & \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \begin{bmatrix} R_3Cs+1 & R_3 \\ sC & 1 \end{bmatrix},$$

donde Z_2 y T_2 corresponden a las caracterizaciones Z y T de la red de la derecha, respectivamente. Por lo tanto, la caracterización T de la red completa está dada por

$$T_{TOTAL} = T_1T_2 = \begin{bmatrix} \frac{R_1(R_3Cs+1)}{R_1+R_2} & \frac{R_1R_3}{R_1+R_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$