Solución Tercer Certamen de Teoría de Redes II (ELO-103)

26 de Noviembre de 2009

Generalidades

- El certamen es de carácter **individual**. Copiar conlleva la reprobación automática del ramo entre otras medidas reglamentarias.
- Sólo puede utilizar el **formulario oficial, lápiz y papel**. Violaciones de esta regla serán consideradas copia.
- Responda cada problema en **hojas separadas y justifique en forma cuidadosa**.
- Tiempo: **90 minutos**.

Problema 1 Considere la red de la figura.

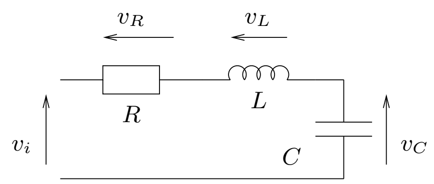


Figure 1: Red considerada en el Problema 1.

1. (**10 ptos**) Verifique que la función de transferencia $H(s)$ entre v_i y v_C está dada por

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

2. (**5 ptos**) Determine la naturaleza filtrante de $H(s)$.
3. (**10 ptos**) Suponga que $R = L = C = 1$. Determine $v_C(t)$ en estado estacionario cuando $v_i(t) = 1 - 2\sin(2t)$.

Solución del Problema 1

1. *Usando las relaciones de un divisor de tensión se obtiene inmediatamente que*

$$v_C = \frac{v_i \frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R + Ls} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} v_i, \tag{1}$$

lo que corresponde a la relación buscada.

2. *Como $H(s)$ es un sistema de segundo orden sin ceros, es inmediato concluir que se trata de un filtro pasabajos.*

3. A las frecuencias de interés tenemos

ω	$\lvert H(j\omega)\rvert$	$\angle H(j\omega)$
0	1	0
2	$\frac{1}{\sqrt{(1-2^2)^2+2^2}}$	$-\angle\big((1-2^2)+2j\big) = -\pi + \arctan 2/3$

Como además $H(s)$ es estable, concluimos entonces que en estado estacionario

$$v_C(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{(1-2^2)^2+2^2}} \sin\left(2t - \pi + \arctan 2/3\right). \tag{2}$$

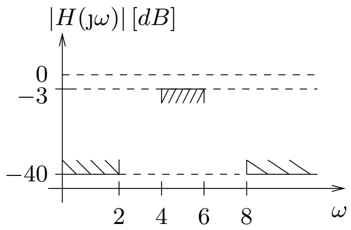
Problema 2 Suponga que debe diseñarse un filtro que provea una atenuación mínima de 40[dB] para frecuencias $\omega \in [0,2] \cup [8,\infty)$ [rad/s], y una atenuación máxima de 3[dB] para frecuencias $\omega \in [4,6]$ [rad/s].

1. (**10 ptos**) Exprese las especificaciones del enunciado como especificaciones sobre un filtro pasabajos normalizado.

2. (**5 ptos**) Proponga un filtro Butterworth pasabajos normalizado que satisfaga las especificaciones establecidas por Ud. en la parte anterior.

Solución del Problema 2

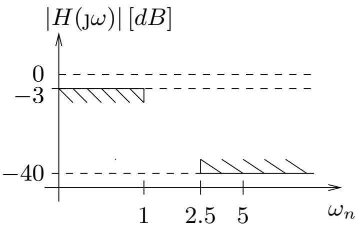
1. Las especificaciones se pueden representar gráficamente como sigue:



Para expresar estas especificaciones como especificaciones sobre un pasabajos normalizado, usamos la transformación $s_n = \frac{s^2+\omega_o^2}{BW s}$ donde, en nuestro caso, $BW = 2$ y $\omega_o^2 = 24$. Por lo tanto, las frecuencias relevantes de la figura anterior se "mapean" de acuerdo a la siguiente tabla:

ω	$\lvert\omega_n\rvert$
0	∞
2	$\left\lvert\frac{-4+24}{2\cdot 2}\right\rvert = 5$
4	1
6	1
8	$\left\lvert\frac{-64+24}{2\cdot 8}\right\rvert = 2.5$
∞	∞

Así, las especificaciones sobre el pasabajos buscado son



i.e., atenuación máxima de 3[dB] para $\omega_n \leq 1$ y mayor a 40[dB] para $\omega_n \geq 2.5$.

2. *De las tablas se aprecia que basta un filtro Butterworth de orden $n = 5$, i.e.,*

$$H_n(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.618s+1)}. \tag{3}$$

Problema 3 (**25 ptos**) Proponga un circuito activo sin inductores que permita implementar la función de transferencia

$$H(s) = \pm \frac{3s^2}{(s^2+2s+4)(s+4)},$$

donde se ha agregado el símbolo $\pm$ para señalar que el signo de $H(s)$ no es relevante.

Solución del Problema 3 *La función de transferencia puede obtenerse usando un FAU en configuración pasaaltos en cascada con un circuito pasabajos de primer orden:*

- *Con un FAU logramos la función de transferencia*

$$H_1(s) = \frac{K_H s^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}. \tag{4}$$

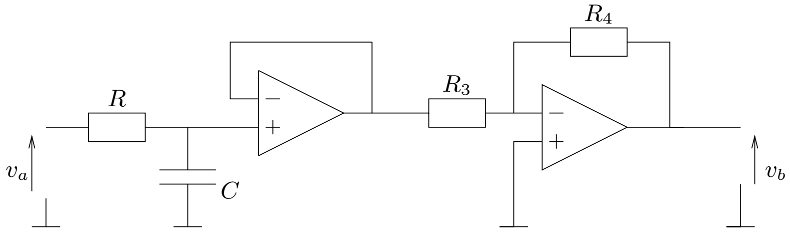
En nuestro caso necesitamos asegurar $\omega_o = 2$ y $Q = 1$. Por lo tanto, basta con elegir los parámetros

$$k_3 = k_4 = 1, \quad R_1 = R_2 = 10K\Omega, \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{40 \cdot 10^3}F. \tag{5}$$

Con ello se logra

$$H_1(s) = \frac{s^2}{s^2+2s+4}. \tag{6}$$

- *Como circuito pasabajos consideraremos el circuito siguiente:*



Resulta fácil ver que la función de transferencia entre v_a y v_b, digamos $H_2(s)$, está dada por

$$H_2(s) = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{1}{RCs+1}. \tag{7}$$

Por lo tanto, si elegimos

$$R_3 = 10K\Omega, \quad R_4 = \frac{30}{4}K\Omega, \quad R = 10K\Omega, \quad C = \frac{1}{40 \cdot 10^3}F, \tag{8}$$

logramos la transferencia

$$H_2(s) = -\frac{3}{s+4}. \tag{9}$$

Por lo tanto, si se conecta el FAU propuesto en cascada al sistema de primer orden de transferencia $H_2(s)$, lograremos un circuito con la transferencia deseada.

Problema 4 (**15 ptos**) Considere un filtro Butterworth pasaaltos de cuarto orden y frecuencia de corte $\omega_c = 5$[rad/s]. Calcule en forma analítica la atenuación provista por este filtro a las frecuencias $\omega \in \{0, 3, 5, \infty\}$ [rad/s].

Solución del Problema 4 *Primero expresamos las frecuencias dadas como frecuencias en escala normalizada:*

ω	$\omega_n = \frac{\omega_c}{\omega} = 5/\omega$
0	∞
3	5/3
5	1
∞	0

Luego recordamos que un filtro Butterworth pasabajos normalizado de cuarto orden posee magnitud

$$M_4(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_n^8}}. \tag{10}$$

Por lo tanto, el pasaaltos original es tal que su respuesta en frecuencia $H(s)$ satisface

$$|H(j\omega)| = M_4(5/\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & si\ \omega = 5 \\ 1 & si\ \omega = \infty \\ 0 & si\ \omega = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+(5/3)^8}} & si\ \omega = 3 \end{cases} \tag{11}$$
