
Solucion Primera Tarea IPD-462

25 de Marzo de 2009

1. Generalidades

- La tarea es de carácter individual.
- El formato es libre.
- Referencias sugeridas: [1, Capítulo 5], [3].
- **Fecha de entrega (límite):** 9 de Abril 2009, 8AM.

2. Motivación

Considere el sistema realimentado de la Figura 1. En dicha figura, H es una función de transferencia de tiempo discreto con dos entradas y dos salidas tal que

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ w \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde $H_{11}, H_{12}, H_{21} \in \mathcal{R}_p$ y $H_{22} \in \mathcal{R}_{sp}$. Suponga que:

- El lazo de control de la Figura 1 es internamente estable y está bien definido.
- d es un proceso estocástico escalar, estacionario y Gaussiano, con media y varianza finitas, y con densidad espectral de potencia $S_d \triangleq |\Omega_d|^2$.
- El estado inicial de H , digamos $x_H(0)$, es una variable aleatoria Gaussiana con media y varianza finitas.
- El proceso q es Gaussiano, estacionario, blanco, de media cero y varianza finita. Además, q es independiente (en forma conjunta) de $x_G(0)$ y d .

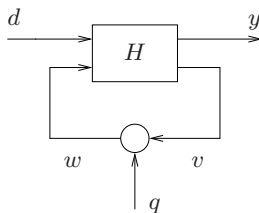


Figure 1: Sistema realimentado.

En las condiciones anteriores, se puede probar que una medida de la tasa de datos promedio que fluye entre v y w está dada por (ver [2])

$$I \triangleq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{S_w}{\sigma_q^2} d\omega, \quad (2)$$

donde σ_q^2 es la varianza de q y S_w es la densidad espectral de potencia de w , i.e.,

$$S_w = |T_{dw}\Omega_d|^2 + \sigma_q^2 |T_{qw}|^2, \quad (3)$$

donde T_{xy} corresponde a la función de transferencia entre x e y en el esquema de la Figura 1.

En lo que sigue, Ud. deberá estudiar el mínimo valor de I compatible con la estabilidad de un lazo de control.

3. Cuestionario

Considere el lazo de la Figura 2, donde $G \in \mathcal{R}_{sp}$ posee un conjunto de polos inestables dado por $\{p_1, \dots, p_{n_p}\}$, y $F \in \mathcal{R}_p \times \mathcal{R}_p$ es tal que

$$v = F_w w + F_y y. \quad (4)$$

1. Establezca condiciones sobre d , q , F , y los estados iniciales de G y F , de modo tal que la tasa de transmisión de datos promedio entre v y w en la Figura 2 pueda cuantificarse usando la cantidad I definida en (2).
2. Suponga que las condiciones establecidas en (a) se cumplen. Defina

$$I_{\inf} \triangleq \inf_{\substack{F \in \mathcal{S} \\ \sigma_q^2 < \infty}} I, \quad I_{\inf,r} \triangleq \inf_{\substack{F \in \mathcal{S}, F_w=0 \\ \sigma_q^2 < \infty}} I, \quad (5)$$

donde

$\mathcal{S} \triangleq \{F \in \mathcal{R}_p \times \mathcal{R}_p : \text{el lazo de la Figura 2 es internamente estable y está bien definido}\}.$

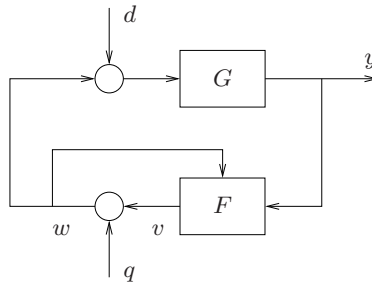


Figure 2: Lazo con dos grados de libertad.

- (a) Demuestre que $I_{\inf} = \sum_{i=1}^{n_p} \ln |p_i|$.
- (b) Pruebe que, en general, $I_{\inf,r} \geq I_{\inf}$. Halle condiciones suficientes y necesarias bajo las que $I_{\inf} = I_{\inf,r}$.
- (c) Considere $G(z) = \frac{z-2.5}{(z-2)(z-3)}$. Calcule $I_{\inf}$ e $I_{\inf,r}$.
- (d) Caracterice $I_{\inf,r}$ en forma explícita para $G \in \mathcal{R}_{sp}$ arbitraria.
- (e) Considere la motivación tras la definición de I . Comente acerca de las ventajas/desventajas de usar un filtro F con dos grados de libertad (caso $F_w \neq 0$) en vez de sólo uno (caso $F_w = 0$).

4. Soluciones

1. Debemos escribir el lazo de la Figura 2 de modo tal que se pueda identificar la transferencia que juega el rol de H en la Figura 1. De la Figura 2 tenemos

$$y = Gd + Gw, \quad v = F_y y + F_w w = F_y Gd + (F_y G + F_w)w. \quad (6)$$

Por lo tanto, hay equivalencia si definimos

$$H \triangleq \begin{bmatrix} G & G \\ F_y G & F_y G + F_w \end{bmatrix}. \quad (7)$$

En consecuencia, para que I admita la interpretación dada en la Sección 2, tienen que cumplirse las siguientes condiciones:

- $F_w \in \mathcal{R}_{sp}$.
 - F debe estabilizar internamente a G (i.e., $F \in \mathcal{S}$).
 - Las condiciones iniciales de F y G , digamos $x_G(0)$ y $x_F(0)$, deben ser conjuntamente Gausianas, y tener medias y varianzas finitas.
 - q y d deben satisfacer las condiciones de la Sección 2, y q debe ser independiente de $(d, x_G(0), x_F(0))$.
2. Note que, si se cumplen las condiciones en la Parte 1, $F_w \in \mathcal{R}_{sp}$. Esta restricción se satisface automáticamente al calcular $I_{\inf,r}$, pero debe forzarse al calcular $I_{\inf}$. Defínase $\bar{\mathcal{S}} \triangleq \mathcal{S} \cap \{F = \begin{bmatrix} F_w & F_y \end{bmatrix} : F_w \in \mathcal{R}_{sp}, F_y \in \mathcal{R}_p\}$.

- (a) A partir de la Figura 2 se puede deducir que

$$w = \frac{1}{1 - F_w - F_y G} q + \frac{F_y G}{1 - F_w - F_y G} d. \quad (8)$$

Por lo tanto, si $p_1^x, \dots, p_{n_x}^x$ denota a los polos inestables de F_x , se tiene, $\forall F \in \bar{\mathcal{S}}$,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left(\frac{1}{\sigma_q^2} \left| \frac{F_y G \Omega_d}{1 - F_w - F_y G} \right|^2 + \left| \frac{1}{1 - F_w - F_y G} \right|^2 \right) d\omega \\
&\stackrel{(a)}{\geq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \frac{1}{1 - F_w - F_y G} \right| d\omega \\
&\stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^{n_p} \ln |p_i| + \sum_{i=1}^{n_w} \ln |p_i^w| + \sum_{i=1}^{n_y} \ln |p_i^y| \\
&\stackrel{(c)}{\geq} \sum_{i=1}^{n_p} \ln |p_i|,
\end{aligned} \tag{9}$$

donde (a) es consecuencia de que $\ln$ es una función creciente y (b) es consecuencia del Teorema Integral de Bode en tiempo discreto (ver [4]) y de que, como $F \in \bar{\mathcal{S}}$, $T \triangleq \frac{1}{1 - F_w - F_y G}$ es bipropia, estable, con ceros inestables dados por la unión de los polos inestables de G , F_y y F_w , y $T(\infty) = 1$.

Suponga que $(A, B, C, 0)$ es una realización mínima de G (esto no resta generalidad). Considere la ley de control

$$v(k) = -K\hat{x}(k), \quad \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bw(k) + J(y(k) - C\hat{x}(k)), \tag{10}$$

donde K y J se eligen de modo tal que $A - BK$ y $A - JC$ sean estables (bajo nuestros supuestos, esto siempre puede hacerse). Defina

$$F_c \triangleq -K(zI - A + JC)^{-1} [B \quad J]. \tag{11}$$

Claramente, F_c es estable y estrictamente propia. Más aún, si en la Figura 2 se elige $F = F_c$, entonces $F \in \bar{\mathcal{S}}$ y F será estable. Con esta elección para F se logra igualdad en la desigualdad (c) en (9). Si, adicionalmente, se elige σ_q^2 suficientemente grande, entonces tendremos una diferencia tan pequeña como se desee entre ambos lados de la desigualdad (a) en (9). Por lo tanto, hemos probado que $I_{\inf} = \sum_{i=1}^{n_p} \ln |p_i|$.

- (b) Si $F \in \mathcal{S}$ y $F_w = 0$, entonces las ideas utilizadas en la parte anterior no son válidas. Note que $F \in \mathcal{S}$ y $F_w = 0$ es equivalente a afirmar que F_y es un controlador admisible para G en el sentido estándar de lazos de control con un grado de libertad. No toda planta G admite un controlador estabilizante y estable. Por lo tanto, en general, $\sum_{i=1}^{n_y} \ln |p_i^y| \geq 0$ y concluimos de (9) que $I_{\inf, r} \geq I_{\inf}$. Habrá igualdad si y sólo si G es fuertemente estabilizante [1].
- (c) Es fácil probar que G no es fuertemente estabilizante. Usando (9) concluimos que, en este caso,

$$I \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \frac{1}{1 - F_y G} \right| d\omega = \sum_{i=1}^{n_p} \ln |p_i| + \sum_{i=1}^{n_y} \ln |p_i^y|. \tag{12}$$

Eligiendo σ_q^2 suficientemente grande, se puede lograr una diferencia arbitrariamente pequeña entre ambos lados de la desigualdad en (12). Por lo tanto, para minimizar I necesitamos

determinar el controlador estabilizante F_y con la menor cantidad de polos inestables posible, y con polos inestable lo más cerca posible del círculo unitario. Los resultados en [1] muestran que existe una función de transferencia F_y que estabiliza a G en un lazo estándar, y que posee sólo un polo inestable. Más aún dicho polo está contenido en el intervalo $(2.5, \infty)$. Por lo tanto, para minimizar I , basta elegir σ_q^2 suficientemente grande, y elegir F_y como se sugiere en [1], con sólo un polo inestable en $(2.5, \infty)$, ubicado arbitrariamente cerca de $z = 2.5$. En conclusión, $I_{\text{inf},r} = I_{\text{inf}} + \ln 2.5$, donde $I_{\text{inf}} = \ln 2 + \ln 3$.

- (d) Para simplificar la notación, supondremos que G no posee ceros de FNM en el eje real negativo. Generalizando el razonamiento utilizado en la parte anterior y usando los resultados en el Capítulo 5 en [1], tenemos que

$$I_{\text{inf},r} = I_{\text{inf}} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \ln |c_i|, \quad (13)$$

donde $c_1, \dots, c_{n_c}$ son los ceros de FNM de G y

$$\mathcal{I} \triangleq \{i \in \{1, \dots, n_c\} : (c_i, c_{i+1}) \text{ contiene un número impar de polos inestables de } G \text{ y } c_{n_c+1} \triangleq \infty\}. \quad (14)$$

- (e) Ambos esquemas permiten estabilizar a G usando una tasa de datos finita. La arquitectura de dos grados de libertad permite, en general, estabilizar a tasas menores que el esquema que tiene sólo un grado de libertad. Dependiendo de la ubicación de los ceros de FNM de G , la tasa de datos adicional en el caso de usar una arquitectura de un grado de libertad puede ser significativamente mayor que en el caso de utilizar una estrategia de control con dos grados de libertad.

References

- [1] J.C. Doyle, B.A. Francis, and A. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [2] N. Elia. When Bode meets Shannon: Control oriented feedback communication schemes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1477–1488, 2004.
- [3] G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2001.
- [4] M.M. Seron, J.H. Braslavsky, and G.C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer, London, 1997.