

---

## Segunda Tarea IPD-462

15 de Abril de 2009

---

### 1. Generalidades

- La tarea es de carácter individual.
- El formato es libre.
- Referencias sugeridas: [2–5].
- **Fecha de entrega (límite):** 30 de Abril 2009, 8AM.

### 2. Cuestionario

#### Problema 1

Considere el esquema de control basado en la realimentación del estado observado de la Figura 1(a). Suponga que la planta  $G$  es de tiempo discreto, con una entrada y una salida, y que su realización subyacente es mínima (i.e., controlable y observable). Suponga, además, que la perturbación  $d$  es escalar y constante (pero de valor desconocido).

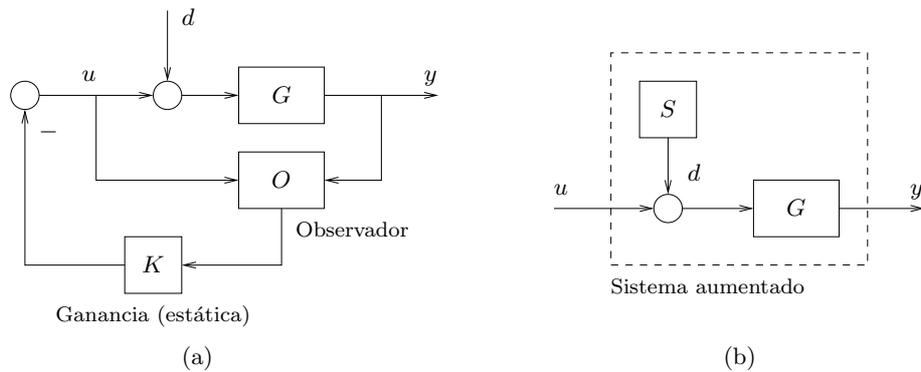


Figura 1: Sistema considerado en el Problema 1.

1. Proponga un sistema (representado en variables de estado) que permita generar  $d$ .
2. Obtenga una representación de estado para el sistema *aumentado* que resulta de la interconexión de  $G$  con sistema propuesto en la parte anterior (vea Figura 1(b)). ¿Es el sistema aumentado observable y controlable? Explique.
3. Muestre cómo un esquema de control basado en la realimentación del estado observado para el sistema aumentado puede compensar la perturbación  $d$  con cero error estacionario. Determine los polos del lazo resultante.

- Muestre que la ley de control del punto anterior puede interpretarse como un lazo realimentado estándar con un controlador con integración.
- Ejemplifique todos los puntos anteriores con un caso simple de su elección. Ilustre con Matlab y/o Simulink.

### Solución

- Como la perturbación es constante, basta elegir el sistema  $S$  de modo que su estado  $x_d$  y su salida  $d$  satisfagan

$$x_d(k+1) = x_d(k), \quad x_d(0) = d_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1)$$

$$d(k) = x_d(k). \quad (2)$$

- Considere una representación de estado de  $G$  dada por

$$x_G(k+1) = A_G x_G(k) + B_G u_G(k), \quad x_G(0) = x_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3)$$

$$y(k) = C_G x_G(k), \quad (4)$$

donde  $(A_G, B_G)$  es controlable y  $(C_G, A_G)$  observable (esto es consecuencia de que la realización de  $G$  es mínima). Definiendo

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x_G^T & x_d^T \end{bmatrix}^T, \quad (5)$$

se tiene que una realización para el sistema aumentado resultante está dada por

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A_G & B_G \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\triangleq A} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B_G \\ 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq B} u(k), \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_o \\ d_o \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (6)$$

$$y(k) = \underbrace{C_G \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq C} x(k). \quad (7)$$

El sistema es claramente no controlable pues la componente  $x_d$  del vector de estado  $x$  no depende de la entrada  $u$  del sistema. Note, además, que el sistema tampoco es estabilizable pues el polo del sistema auxiliar  $S$  (que no posee entrada) está en  $z = 1$ . Sin embargo, este polo es sólo consecuencia de la naturaleza constante de  $d$  y no es, estrictamente hablando, un polo del lazo cerrado (es un polo del sistema que incluye tanto al modelo de perturbación como al lazo cerrado).

El sistema  $S$  se halla conectado en serie en  $G$ . Tanto  $S$  como  $G$  son observables (por construcción lo es  $S$  y por suposición lo es  $G$ ). La única manera de que el sistema resultante pierda observabilidad es que halla una cancelación del polo en  $z = 1$  del sistema  $S$  (ver [2]). Por lo tanto, si  $G$  no posee ceros en  $z = 1$ , la observabilidad del sistema resultante estará garantizada. Si  $G$  posee un cero en  $z = 1$ , entonces se perderá observabilidad. Note, además, que en este caso no se podrán compensar perturbaciones constantes en forma exacta con un lazo internamente estable (¿por qué?).

3. Como consecuencia de la discusión del punto anterior, supondremos que  $G$  no posee ceros en  $z = 1$  y, por lo tanto, que  $(C, A)$  es observable.

Un observador para el sistema aumentado está dado por

$$\hat{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + J(y(k) - C\hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = 0, \quad (8)$$

donde  $\hat{x}$  corresponde a una estimación del estado correspondiente, y se halla particionado en forma conforme a  $x$  (i.e.,  $\hat{x} \triangleq [\hat{x}_G^T \ \hat{x}_d^T]^T$ ). Por lo tanto, el error de estimación  $\tilde{x} \triangleq \hat{x} - x$  obedece a la ecuación

$$\tilde{x}(k+1) = (A - JC)\tilde{x}(k), \quad \tilde{x}(0) = - \begin{bmatrix} x_o \\ d_o \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Como  $(C, A)$  es observable, podemos elegir  $J$  de modo que  $A - JC$  sea estable y, por lo tanto, tal que  $\tilde{x}(k) \rightarrow 0$  con  $k \rightarrow \infty$ . Eligiendo  $J$  del modo anterior, se tiene que

$$\hat{x}_G(k) \rightarrow x(k), \quad \hat{x}_d(k) \rightarrow d_o. \quad (10)$$

Por lo tanto, a la salida del observador tendremos una señal que converge al valor de la perturbación con  $k \rightarrow \infty$ .

Considere la ley de control para el sistema aumentado dada por

$$u(k) = -K\hat{x}(k) = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_G(k) \\ \hat{x}_d(k) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Como  $\hat{x}_d(k) \rightarrow d_o$  y  $d(k) = x_d(k) = d_o$ , basta elegir  $K_2 = I$  para compensar, en estado estacionario y suponiendo un lazo internamente estable,  $d$  en forma perfecta. La elección de  $K_1$  se hace de modo de garantizar que, efectivamente, el lazo cerrado sea internamente estable. Como rige el principio de separación (de polos) y  $J$  se ha elegido de modo que  $A - JC$  sea estable, basta analizar

$$A - BK = \begin{bmatrix} A_G - B_G K_1 & B_G K_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Claramente,  $A - BK$  posee polos fijos en  $z = 1$  cuya ubicación no se altera con la elección de  $K$  (esto es consistente con la Parte 2). Los restantes polos del lazo se pueden mover arbitrariamente eligiendo  $K_1$  apropiado (recuerde que  $(A_G, B_G)$  es controlable).

En resumen, para que una ley de control basada en la realimentación del estado observado del sistema aumentado compense  $d$  sin error estacionario, basta elegir  $J$  en (8) de modo que  $A - JC$  sea estable, y  $K = [K_1 \ K_2]$  en (11) de modo que  $K_2 = I$  y  $A_G - B_G K_1$  sea estable. Con estas elecciones, los polos del lazo serán los autovalores de  $A - JC$  unidos a los de  $A_G - B_G K_1$  (el sistema formado por el lazo y el sistema auxiliar  $S$  tiene, además, un polo en  $z = 1$ ).

4. Defina una partición de  $J$  dada por  $J = [J_1^T \ J_2^T]^T$ , donde las dimensiones de  $J_1$  y  $J_2$  son compatibles con las dimensiones de la partición de  $A$ . Es fácil ver que la ley de control descrita por (8) y (11) es tal que

$$u(k) = - \begin{bmatrix} K_1 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}(k), \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= (A - JC)\hat{x}(k) - B \begin{bmatrix} K_1 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + Jy(k) \\ &= \begin{bmatrix} A_G - J_1 C_G - B_G K_1 & 0 \\ -J_2 C_G & 1 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + Jy(k).\end{aligned}\quad (14)$$

Por lo tanto, la transferencia entre  $y$  y  $u$ , digamos  $C_{\text{equiv}}$ , posee integración.

5. Considere la planta

$$G(z) = \frac{(z - 0,8)}{(z - 2)(z - 0,5)}.\quad (15)$$

Las matrices  $K$  y  $J$  se eligen siguiendo siguiendo la “receta” de la Parte 3. En particular, se pueden usar los siguientes comando de Matlab:

```
G=tf([1 -0.8],poly([2 0.5]),1);
G=minreal(ss(G));
A = [G.a G.b; 0 0 1]; B = [G.b; 0 ]; C = G.c*[eye(2) [0;0]];
J=dlqr(A', C', eye(3), 1)';
K1 = dlqr(G.a, G.b, eye(2),1);
K=[K1 1];
O = minreal(ss( A-J*C, [J B], eye(3), zeros(3,2) ,1));
Cequiv = ss( A-J*C-B*K, J, -K, 0,1);
```

donde el sistema  $O$  corresponde al observador, y el sistema  $C_{\text{equiv}}$  al controlador equivalente de la parte anterior:

$$C_{\text{equiv}}(z) = \frac{-4,69(z - 0,5)(z - 0,9233)}{(z - 1)(z - 0,805)(z + 2,134)}.\quad (16)$$

(claramente,  $C_{\text{equiv}}$  posee integración).

La Figura 2 muestra la salida del observador  $O$  y la compara con el estado del sistema aumentado. Se observa convergencia de las estimaciones a los estados reales (note que los cambios en  $d$  también son seguidos).

La Figura 3 muestra la salida del lazo que usa la ley de control basada en la realimentación del estado propuesta arriba y la compara con la salida del sistema de control estándar que utiliza el controlador  $C_{\text{equiv}}$ . Se observa que, como era de esperarse, ambas salidas son idénticas (se consideraron condiciones iniciales  $x_G(0) = [1 \ -1]^T$  en la planta  $G$ , y cero en el observador  $O$  y el controlador  $C_{\text{equiv}}$ ).

## Problema 2

Considere el sistema

$$x(k+1) = \alpha x(k) + \beta u(k), \quad x(0) = x_o, \quad k \in \mathbb{N}_0,\quad (17)$$

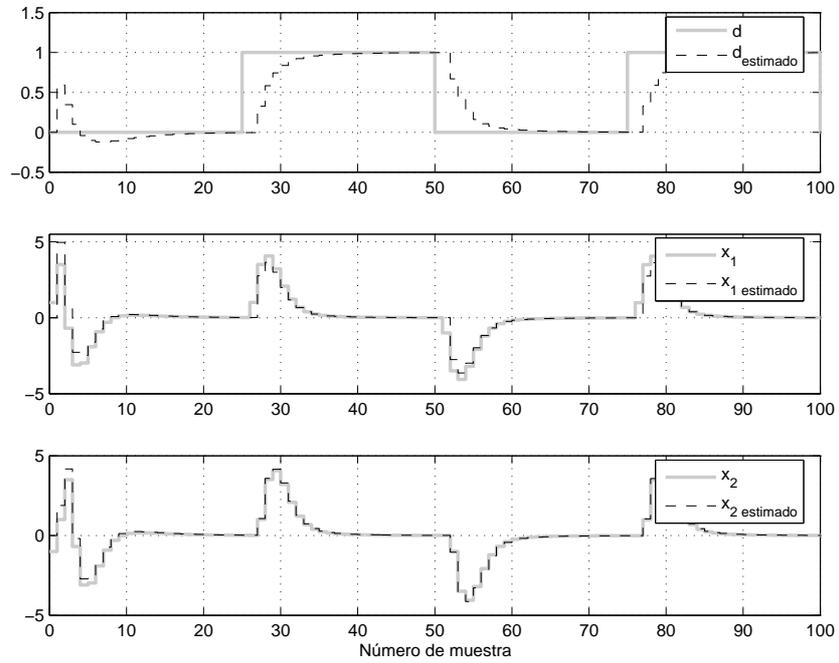


Figura 2: Salida del observador propuesto y evolución de los estados del sistema aumentado.

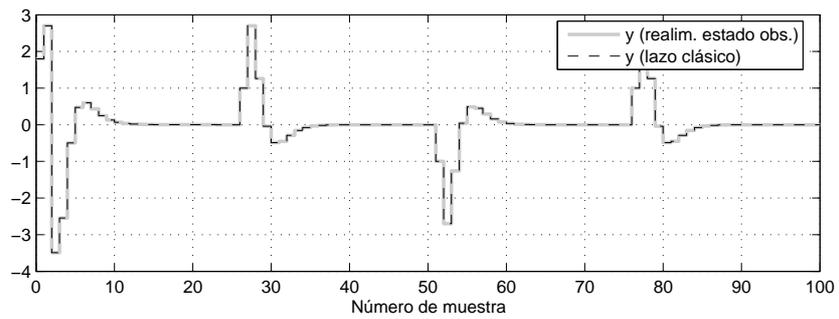


Figura 3: Comparación entre respuesta del lazo basado en realimentación del estado observado y el lazo estándar.

donde  $x(k), u(k), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , y el estado inicial  $x_o$  es determinístico (pero de valor desconocido). Considere el funcional

$$J \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} \{\gamma x(k)^2 + u(k)^2\}, \quad (18)$$

donde  $\gamma \in \mathbb{R}_0^+$ .<sup>1</sup>

Suponga que  $x(k)$  puede medirse en forma perfecta. Estudie, en función de  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , la ley de control óptima estacionaria (i.e., cuando  $N \rightarrow \infty$ ).

### Solución

Para referencia futura, citamos el siguiente resultado (ver [1]):

**Theorem 1** *Considere la ecuación de Ricatti*

$$L(k+1) = Q + A^T L(k) A - A^T L(k) B (R + B^T L(k) B)^{-1} B^T L(k) A, \quad L(0) = Q_N, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (19)$$

Si  $Q = C^T C \geq 0$ ,  $R > 0$ ,  $Q_N \geq 0$  y  $(A, B)$  es estabilizable y  $(C, A)$  detectable, entonces:

1.  $\exists L \geq 0$ , independiente de  $Q_N$ , tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(k) = L$ .
2. La matriz  $L$  de la parte anterior es la única solución de la ARE

$$L = Q + A L A^T - A^T L B (R + B^T L B)^{-1} B^T L A \quad (20)$$

y, además, es positiva semidefinida.

3. La matriz  $L$  de la Parte 1 es tal que  $A - BK$  es estable, donde

$$K \triangleq (R + B^T L B)^{-1} B^T L A. \quad (21)$$

□□

Para estudiar la ley de control estacionaria, debemos estudiar la convergencia de  $L(k)$  a una solución estacionaria y, en caso de que esto suceda, la estabilidad del lazo resultante.

- En primer lugar notamos que si  $|\alpha| < 1$ , entonces  $(\alpha, \beta)$  es estabilizable y  $(\gamma, \alpha)$  es detectable para todo valor de  $(\beta, \gamma)$ . Por lo tanto, si  $|\alpha| < 1$ , el Teorema 1 es válido y se tiene que la ley de control estacionaria existe y es estabilizante (note que, en nuestro problema, la matriz de ponderación de  $u$  es no singular).
- Si  $|\alpha| \geq 1$  y  $\beta = 0$ , entonces el Teorema 1 no es aplicable. Debemos, entonces, estudiar la convergencia de  $L(k)$  “a mano”. En este caso, (19) se reduce a

$$L(k+1) = \gamma + \alpha^2 L(k), \quad L(0) = 0. \quad (22)$$

---

<sup>1</sup> $\mathbb{R}^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ ,  $\mathbb{R}_0^+ \triangleq \mathbb{R} \cup \{0\}$ .

Por lo tanto es fácil ver que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(k) = L = \begin{cases} \infty & \text{si } |\alpha| > 1 \text{ ó } (|\alpha| = 1 \text{ y } \gamma > 0), \\ 0 & \text{si } |\alpha| = 1 \text{ y } \gamma = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Es decir,  $L(k)$  converge si y sólo si  $|\alpha| = 1$  y  $\gamma = 0$ .<sup>2</sup> Como  $\beta = 0$ , la matriz “A” del lazo cerrado resultante de elegir  $u(k) = -Kx(k)$ , con  $K = \alpha\beta L(1 + \beta^2 L)^{-1} = 0$ , es igual a  $\alpha$ . En consecuencia, si  $\beta = 0$  y  $|\alpha| \geq 1$ , la ley de control óptima estacionaria existe si y sólo si  $\gamma = 0$  y  $|\alpha| = 1$ . Sin embargo, aún en dicho caso, la ley de control estacionaria no es estabilizante.

- Si  $|\alpha| \geq 1$ ,  $\gamma = 0$  y  $\beta \neq 0$ , entonces el Teorema 1 no es aplicable y (19) se reduce a

$$L(k+1) = \frac{\alpha^2 L(k)}{1 + \beta^2 L(k)}, \quad L(0) = 0. \quad (24)$$

Por lo tanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(k) = L = 0$  y la ley de control estacionaria existe. Sin embargo, no es estabilizante pues la ganancia de realimentación óptima es cero y  $|\alpha| \geq 1$ .

### Problema 3

Considere el sistema

$$x(k+1) = A_G x(k) + B_G u(k), \quad x(0) = x_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (25a)$$

$$y(k) = C_G x(k), \quad (25b)$$

donde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  y  $A_G, B_G$  y  $C_G$  son matrices reales de dimensiones apropiadas. Suponga que  $x_o$  es una variable aleatoria de segundo orden, y que  $(A_G, B_G)$  es estabilizable y  $(C_G, A_G)$  es detectable.

La salida  $y$  del sistema en (25) debe seguir una referencia estocástica  $r$ . Suponga que  $r$  puede modelarse como un proceso estacionario en sentido amplio de segundo orden y media cero, que posee una densidad espectral de potencia racional y sin ceros sobre el círculo unitario. Suponga que  $r$  es independiente de  $x_o$ . Para medir la calidad del seguimiento de la referencia  $r$ , se propone el funcional

$$J \triangleq \sigma_e^2 + \rho \sigma_u^2, \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \quad (26)$$

donde  $e \triangleq r - y$  es el error de seguimiento y

$$\sigma_i^2 \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ [i(k) - \mu_i(k)]^T [i(k) - \mu_i(k)] \right\}, \quad i \in \{e, u\}. \quad (27)$$

1. Escriba el problema de optimizar  $J$  como un problema estándar de regulación cuadrática sujeta a perturbaciones estocásticas (i.e., en la forma canónica vista en clase). ¿Qué señales debe medir para implementar la ley de control resultante? Comente.
2. Determine la ley de control óptima y el costo óptimo.
3. Pruebe que la ley de control óptima  $u_{\text{opt}}$  es tal que  $u_{\text{opt}}(k) = -K_x x(k) - f(k)$ , donde  $K_x$  es la ganancia de realimentación óptima para el problema en que interesa optimizar  $J$  cuando  $r = 0$ . Determine  $f(k)$  y haga un esquema del lazo cerrado resultante. Comente.

<sup>2</sup>Nótese que en el último caso el límite es igual a la condición inicial para  $L(0)$ .

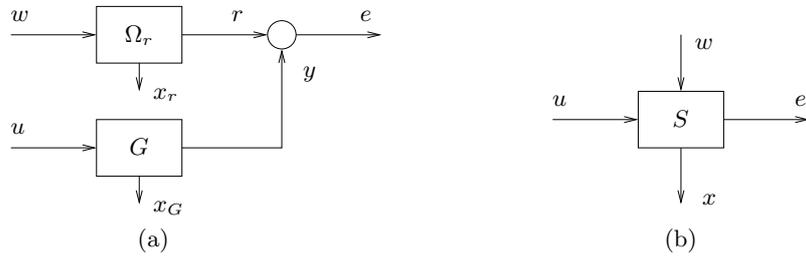


Figura 4: (a) Situación considerada en el Problema 3 y (b) reescritura equivalente.

4. Considere un sistema de segundo orden e ilustre todos los puntos anteriores utilizando Matlab y/o Simulink. Compare el costo óptimo teórico con el costo óptimo simulado. Compare el costo óptimo con el costo obtenido al utilizar un controlador PID estándar estabilizante.

### Solución

1. La situación bajo consideración puede escribirse como muestra la Figura 4(a), donde  $G$  corresponde a la planta (ver (25)), y  $\Omega_r$  es un sistema estable con transferencia estrictamente propia e igual a un factor espectral de la referencia (esto no conlleva pérdida de generalidad; ¿por qué?). La señal  $w$  es ruido blanco, de media cero y varianza identidad, supuesto independiente del estado inicial de  $G$  y  $\Omega_r$  (denotados  $x_o$  y  $x_{r,o}$ , respectivamente).

Si

$$x_r(k+1) = A_r x_r(k) + B_r w(k), \quad x_r(0) = x_{r,o} \quad (28)$$

$$r(k) = C_r x_r(k) \quad (29)$$

corresponde a una representación de estado mínima de  $\Omega_r$ , entonces el sistema de la Figura 2(a) puede escribirse como

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_G & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B_G \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_r \end{bmatrix} w(k), \quad x(0) = x_o \triangleq \begin{bmatrix} x_o \\ x_{r,o} \end{bmatrix} \quad (30a)$$

$$e(k) = [-C_G \quad C_r] x(k), \quad (30b)$$

donde

$$x \triangleq [x_G^T \quad x_r^T]^T \quad (31)$$

y  $(A_G, B_G, C_G, 0)$  corresponde a la realización de la planta  $G$  en (25). Gráficamente, el sistema resultante puede representarse como se indica en la Figura 2(b). Como  $w$  es ruido blanco independiente de  $x_o$ , concluimos que basta definir

$$v(k) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ B_r \end{bmatrix} w(k), \quad (32)$$

para que el sistema en (30) se reduzca al sistema estándar considerado en clase. Para implementar la ley de control resultante se necesita medir  $x$ , es decir, el estado de la planta y el estado del sistema auxiliar que modela la referencia (esto no es razonable en la práctica).

2. Definiendo

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_G & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} B_G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C \triangleq [-C_G \quad C_r], \quad Q \triangleq C^T C, \quad R \triangleq \rho I, \quad (33)$$

el problema de interés puede escribirse como el problema de hallar la ley de control óptima  $u$ , que minimiza

$$J = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) \right\}, \quad (34)$$

donde  $x$  obedece a

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + v(k), \quad x(0) = x_o, \quad (35)$$

y  $v$  es ruido blanco independiente de  $x_o$ , y con media cero y varianza

$$R_v = \begin{bmatrix} 0 \\ B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_r \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_r B_r^T \end{bmatrix} \quad (36)$$

(recuerde la definición de  $v$  en (32) y el que  $w$  posee varianza identidad).

Recuerde que  $A_r$  es estable y que  $(A_G, B_G, C_G, 0)$  es detectable y estabilizable. Por lo tanto,  $(A, B)$  es estabilizable y  $(C, A)$  detectable. Como consecuencia de lo anterior, y tomando en cuenta que  $\rho > 0$ , concluimos que la ley de control óptima está dada por (ver, e.g., [3] o apuntes de clase)

$$u(k) = -K_{\text{opt}} x(k), \quad K_{\text{opt}} \triangleq (R + B^T P B)^{-1} B^T P A, \quad (37)$$

donde  $P \geq 0$  es la única solución de la ARE

$$P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A. \quad (38)$$

Asimismo, es fácil ver que el costo óptimo está dado por

$$J_{\text{opt}} = \text{trace} \{ R_v P \}. \quad (39)$$

3. Particionado  $K_{\text{opt}}$  de forma conforme a la partición de  $x$ , se puede concluir en base a (37) que la ley de control óptima puede escribirse como

$$u(k) = - \begin{bmatrix} K_G & K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_G(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} = -K_G x_G(k) - K_r x_r(k). \quad (40)$$

Por lo tanto,  $f(k) = K_r x_r(k)$ . La ley de control resultante se ilustra en la Figura 5.

Considere la partición de  $P$  siguiente

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

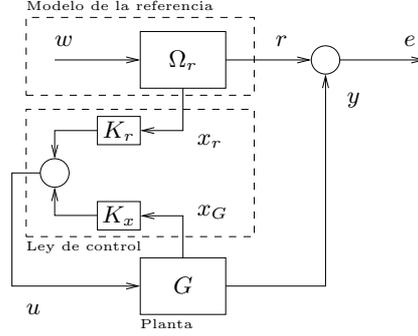


Figura 5: Esquema de control óptimo para el Problema 3.

donde los bloques se han elegido en forma conforme a la partición de  $x$ . Para probar que  $K_G$  corresponde a la ganancia óptima cuando interesa minimizar  $J$  y  $r = 0$ , basta notar que (37), (38) y (33) implican

$$K_{\text{opt}} = [K_G \quad K_r] = \left[ (\rho I + B_G^T P_{11} B_G)^{-1} B_G^T P_{11} A_G \quad (\rho I + B_G^T P_{11} B_G)^{-1} B_G^T P_{12} A_r \right] \quad (42)$$

y

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_G^T C_G & -C_G^T C_r \\ -C_r^T C_G & C_r^T C_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_G^T P_{11} A_G & A_G^T P_{12} A_r \\ A_r^T P_{21} A_G & A_r^T P_{22} A_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_G^T P_{11} B_G \\ A_r^T P_{21} B_G \end{bmatrix} K_{\text{opt}}. \quad (43)$$

Por lo tanto,

$$K_G = (\rho I + B_G^T P_{11} B_G)^{-1} B_G^T P_{11} A_G, \quad (44)$$

donde

$$P_{11} = C_G^T C_G + A_G^T P_{11} A_G + A_G^T P_{11} B_G (\rho I + B_G^T P_{11} B_G)^{-1} B_G^T P_{11} A_G. \quad (45)$$

Las ecuaciones (44) y (45) son, precisamente, las ecuaciones que definen la ley de control óptima cuando  $r = 0$ .

4. Considere la planta

$$G(z) = \frac{(z - 0,8)}{(z - 2)(z - 0,5)}, \quad (46)$$

suponga que

$$\Omega_r(z) = \frac{0,1}{z - 0,9} \quad (47)$$

y haga  $\rho = 0,1$ . La ley de control óptima se puede hallar usando los siguientes comandos de Matlab:

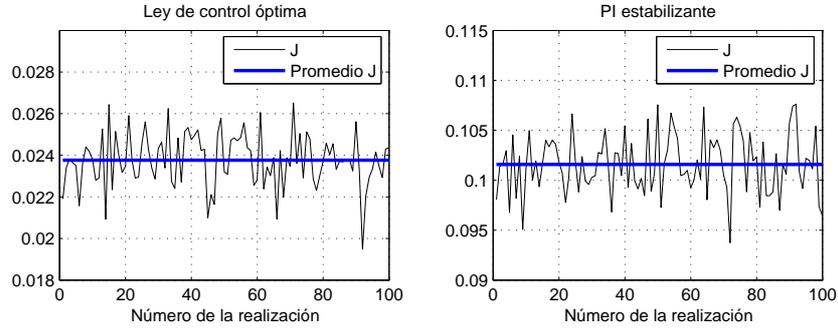


Figura 6: Valor medido del funcional  $J$  cuando se usa la ley de control óptima (izquierda) y un controlador PI estabilizante (derecha). (Note la diferencia de escala.)

```

G=tf([1 -0.8],poly([2 0.5]),1);
G=minreal(ss(G));
Omega_r = tf([1-0.9],[1 0.9],1);
Omega_r = minreal(ss(Omega_r));
rho=0.1;
A = blkdiag(G.a, Omega_r.a);
B = [G.b; zeros(size(Omega_r.a,1), size(G.b,2))];
C = [-G.c Omega_r.c];
R = rho*eye(size(G.b,2));
[Kopt, P] = dlqr(A,B,C'*C, R);

```

En este caso, la ley de control óptima está dada por

$$u(k) = [1,6436 \quad -0,9295 \quad -0,2483] x(k), \quad (48)$$

donde los primeros dos elementos de la ganancia de realimentación óptima no cambian si se modifica  $\Omega_r$ . (De hecho, si  $\Omega_r(z) = z^{-1}$ , la ley óptima se reduce a

$$u(k) = [1,6436 \quad -0,9295 \quad 0] x(k). \quad (49)$$

[Justifique el cero en la última componente de la ganancia óptima.] Por su parte, el costo óptimo está dado por

$$J_{opt} = 0,0239. \quad (50)$$

La Figura 6(izquierda) muestra estimaciones numéricas del costo óptimo considerando 100 realizaciones de la referencia y los estados iniciales, y el promedio correspondiente. (¿Por qué es necesario considerar varias realizaciones y promediar?) Dicho promedio, digamos  $\bar{J}_{med}$ , es igual a  $\bar{J}_{med} = 0,0238$  (lo que implica un error relativo del 0,52%).

La Figura 6(derecha) muestra estimaciones del costo  $J$  cuando se utiliza el controlador PI

$$C(z) = \frac{2(z - 0,5)}{z - 1}. \quad (51)$$

Resulta evidente que  $C(z)$  está muy lejos de proveer un desempeño comparable al desempeño óptimo (compare con Figura 6(izquierda) y note que las escalas verticales son distintas).

## Referencias

- [1] D.P. Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control*. Athena Scientific, 1995.
- [2] G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2001.
- [3] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley–Interscience, 1972.
- [4] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems*. Prentice Hall, 1994.
- [5] J.I. Yuz and M.E. Salgado. From classical to state-feedback-based controllers. *IEEE Control Systems Magazine*, 23(4):58–67, 2003.