Cuarta Tarea IPD-462

27 de Mayo de 2009

1. Generalidades

- La tarea es de carácter individual.
- El formato es libre.
- Referencias sugeridas y lecturas complementarias: [1–3, 5].
- **La notación utilizada más abajo corresponde a la notación definida en clases.**
- **Fecha de entrega (límite):** 11 de Junio 2009, 10:00AM.

2. Preliminares

Un canal de comunicación con ruido blanco aditivo (additive white noise channel) es un sistema estático con entrada v y salida w tal que

$$w(k) = v(k) + q(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

donde q es un proceso de ruido blanco con media nula y varianza finita, y la varianza (o potencia media) estacionaria de v, digamos σ_v^2, está limitada por arriba, i.e.,

$$\sigma_v^2 \leq P \tag{2}$$

para algún $P \in \mathbb{R}^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \infty\}$ arbitrario. (Vea Figura 1(a).) El modelo anterior supone que tanto q como P están fijos y corresponden a parámetros de cierta situación física (vea, e.g., [4]).

Diremos que el canal de comunicación descrito más arriba se usa con realimentación, si su salida se halla disponible en el lado del emisor con (al menos) una muestra de retardo. Gráficamente, un canal de comunicación con ruido blanco aditivo usado con realimentación puede describirse como indica la Figura 1(b).

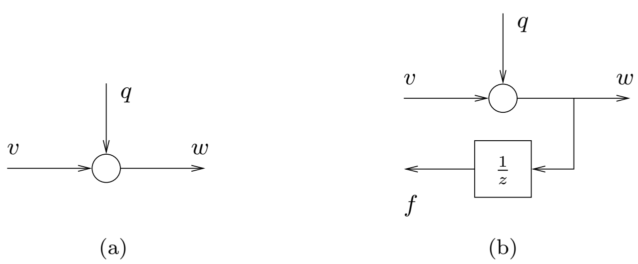

Figura 1: (a) Canal de comunicación con ruido blanco aditivo; (b) canal de comunicación con ruido blanco aditivo usado con realimentación.

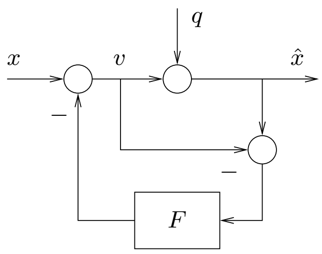

Figura 2: Transmisión de la señal x a través de un canal con ruido blanco aditivo, usado con realimentación.

3. Cuestionario

Problema 1

Suponga que un proceso estocástico escalar x debe transmitirse a través de un canal de comunicación con ruido blanco aditivo usado con realimentación. Para ello, se sugiere utilizar la arquitectura de la Figura 2, donde $F \in \mathcal{R}_p$ es un filtro que debe diseñarse.

Suponga que x es un proceso estacionario en sentido amplio, de segundo orden y no correlacionado con q, y con una densidad espectral que no posee ceros sobre el círculo unitario ($|z| = 1$). Suponga, además, que el estado inicial de F es una variable aleatoria de segundo orden.

1. Determine condiciones necesarias y suficientes para que el sistema de la Figura 2 sea internamente estable y, además, corresponda a una arquitectura que usa un canal de comunicación con ruido blanco aditivo y realimentación. Defina $\mathcal{S}$ como el conjunto de todos los F que satisfacen las condiciones por Ud. determinadas.

2. Suponga que el límite de potencia a la entrada del canal es infinito, i.e., que $P \to \infty$. Determine, si existiesen (si no existiesen las cantidades mencionadas, explique por qué)

$$\sigma^2_{\text{opt}} \triangleq \min_{F\in\mathcal{S}} \sigma^2_{e_W}, \quad F_{\text{opt}} \triangleq \arg\min_{F\in\mathcal{S}} \sigma^2_{e_W}, \tag{3}$$

donde $\sigma^2_{e_W}$ corresponde a la varianza estacionaria de la señal

$$e_W \triangleq W(x - \hat{x}), \tag{4}$$

y $W \in \mathcal{U}_\infty$ es un filtro de peso.

3. Suponga que $P < \infty$. Determine, si existiesen,

$$\left[\sigma^2_{\text{opt}}\right]_P \triangleq \min_{\substack{F\in\mathcal{S}\\ \sigma_v^2 \le P}} \sigma^2_{e_W}, \quad F^P_{\text{opt}} \triangleq \arg\min_{\substack{F\in\mathcal{S}\\ \sigma_v^2 \le P}} \sigma^2_{e_W}. \tag{5}$$

(**Ayuda:** Determine el rango de valores de P que hace los problemas anteriores factibles.)

4. Ilustre los puntos anteriores usando Matlab/Simulink y, además, determine la curva de "trade-off" óptimo en el plano $(\sigma^2_{e_W}, \sigma^2_v)$. Interprete y explique.

Solución

1. El esquema propuesto es tal que F se halla en lazo abierto. Por lo tanto, F debe ser estable. Además, F debe ser estrictamente propio, pues de otro modo usaría la salida del canal $\hat{x}$ con menos de una muestra de retardo. En consecuencia, $\mathcal{S} = \mathcal{RH}_2$.

2. Claramente

$$\hat{x} = x + (1-F)q \quad \Rightarrow \quad e_W = -W(1-F)q \quad \Rightarrow \quad \sigma_{e_W}^2 = \sigma_q^2 \, ||W(1-F)||_2^2 \,, \tag{6}$$

donde σ_q^2 corresponde a la varianza del ruido de canal q. Por otro lado, $F \in \mathcal{RH}_2$ si y sólo si $Q \triangleq zF \in \mathcal{RH}_\infty$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sigma_{e_W}^2 &\overset{(a)}{=} \sigma_q^2 \, ||zW - WQ||_2^2 \\
&\overset{(b)}{=} \left|\left| [zW]_{\mathcal{H}_2^\perp} + [zW]_{\mathcal{H}_2} - WQ \right|\right|_2^2 \\
&\overset{(c)}{=} \left|\left| [zW]_{\mathcal{H}_2^\perp} - [zW]_{\mathcal{H}_2^\perp}(0) \right|\right|_2^2 + \left|\left| [zW]_{\mathcal{H}_2^\perp}(0) + [zW]_{\mathcal{H}_2} - WQ \right|\right|_2^2 ,
\end{aligned} \tag{7}$$

donde (a) es consecuencia de que z es unitaria, (b) se obtiene al realizar una descomposición ortogonal de zW, y (c) es consecuencia de la ortogonalidad de $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_2^\perp$. Dado que $W \in \mathcal{U}_\infty$, concluimos de (7), y de la definición de Q, que

$$\sigma_{\text{opt}}^2 = \sigma_q^2 \left|\left| [zW]_{\mathcal{H}_2^\perp} - [zW]_{\mathcal{H}_2^\perp}(0) \right|\right|_2^2, \quad F_{\text{opt}} = \frac{1}{z} W^{-1} \left([zW]_{\mathcal{H}_2^\perp}(0) + [zW]_{\mathcal{H}_2} \right) \in \mathcal{RH}_2. \tag{8}$$

Las expresiones anteriores se pueden simplificar bastante si se escribe

$$zW = \underbrace{z(W - W(\infty))}_{\triangleq A} + zW(\infty) = \underbrace{[A]_{\mathcal{H}_2}}_{=[zW]_{\mathcal{H}_2}} + \underbrace{A(\infty) + zW(\infty)}_{=[zW]_{\mathcal{H}_2^\perp}} . \tag{9}$$

Así, (8) se puede reescribir como sigue:

$$\sigma_{\text{opt}}^2 = \sigma_q^2 W(\infty)^2, \quad F_{\text{opt}} = 1 - W^{-1} W(\infty). \tag{10}$$

3. Como x y q no están correlacionados, concluimos de la figura que

$$v = x - Fq \quad \Rightarrow \quad \sigma_v^2 = \sigma_x^2 + \sigma_q^2 \, ||F||_2^2 \, . \tag{11}$$

La ecuación anterior implica que será posible satisfacer la restricción de potencia en v si y sólo si $P \geq \sigma_x^2$. Para dichos valores de P, el problema de interés es equivalente al problema siguiente:

$$\inf_{\substack{F \in \mathcal{RH}_2 \\ ||F||_2^2 \leq \frac{P - \sigma_x^2}{\sigma_q^2}}} ||W(1-F)||_2^2 \, . \tag{12}$$

Motivados por los resultados de clase estudiamos el Lagrangiano

$$L_\epsilon \triangleq \epsilon \, ||W(1-F)||_2^2 + (1-\epsilon) \, ||F||_2^2 , \quad \epsilon \in [0,1]. \tag{13}$$

Al igual que en la parte anterior definimos $Q \triangleq zF \in \mathcal{RH}_\infty$ y, además,

$$A_\epsilon \triangleq \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon}W \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_\epsilon \triangleq \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon}W \\ \sqrt{1-\epsilon} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Introducimos factores B_i inner y B_o outer tales que $B_\epsilon = B_i B_o$, y definimos

$$\phi \triangleq \begin{bmatrix} I - B_i B_i^\sim \\ B_i^\sim \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Así,

$$\begin{aligned} L_\epsilon &\overset{(a)}{=} \left|\left| \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon}W \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon}W \\ \sqrt{1-\epsilon} \end{bmatrix} \frac{Q}{z} \right|\right|_2^2 \\ &\overset{(b)}{=} ||\phi \left(zA_\epsilon - B_i B_o Q\right)||_2^2 \\ &\overset{(c)}{=} ||\left(I - B_i B_i^\sim\right) zA_\epsilon||_2^2 + ||B_i^\sim zA_\epsilon - B_o Q||_2^2 \\ &\overset{(d)}{=} ||\left(I - B_i B_i^\sim\right) zA_\epsilon||_2^2 + \left|\left| [B_i^\sim zA_\epsilon]_{\mathcal{H}_2^\perp} - [B_i^\sim zA_\epsilon]_{\mathcal{H}_2^\perp}(0) \right|\right|_2^2 + \\ &\qquad \left|\left| [B_i^\sim zA_\epsilon]_{\mathcal{H}_2^\perp}(0) + [B_i^\sim zA_\epsilon]_{\mathcal{H}_2} - B_o Q \right|\right|_2^2, \end{aligned} \tag{16}$$

donde (a) es consecuencia de la definición de L_ϵ y de las propiedades de $||\cdot||_2^2$, (b) es consecuencia de que ϕ y z son unitarias, (c) es consecuencia de la definición de ϕ y de que B_i es inner, y (d) es consecuencia de la ortogonalidad de $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_2^\perp$. Dado que $W \in \mathcal{U}_\infty$, B_ϵ no posee ceros sobre el círculo para ningún valor de $\epsilon \in [0,1]$. Por lo tanto, $B_o \in \mathcal{U}_\infty$ y (16) implica

$$F_\epsilon \triangleq \arg \inf_{F \in \mathcal{RH}_2} L_\epsilon = \frac{1}{z} B_o^{-1} \left([B_i^\sim zA_\epsilon]_{\mathcal{H}_2^\perp}(0) + [B_i^\sim zA_\epsilon]_{\mathcal{H}_2} \right) \in \mathcal{RH}_2. \tag{17}$$

Por lo tanto,

$$F_{\text{opt}}^P = F_{\epsilon^*}, \tag{18}$$

donde $\epsilon^* = 1$ si $||F_1||_2^2 < \frac{P-\sigma_x^2}{\sigma_q^2}$ y, en caso contrario, ϵ^* es el único valor de $\epsilon \in [0,1]$ que satisface $||F_\epsilon||_2^2 = \frac{P-\sigma_x^2}{\sigma_q^2}$. Asimismo,

$$\left[\sigma_{\text{opt}}^2\right]_P = ||W(1 - F_{\epsilon^*})||_2^2 \,. \tag{19}$$

4. Para ilustrar lo anterior se elige una fuente x pasabajos resonante, con factor espectral

$$\Omega_x = \frac{0{,}049552(z + 0{,}9993)}{(z^2 - 1{,}899z + 0{,}998)} \tag{20}$$

y varianza $\sigma_x^2 = 24{,}8$. Como el mayor contenido espectral de la fuente se halla en baja frecuencia, se elige un filtro de peso pasabajos dado por

$$W = \frac{0{,}05284(z + 0{,}99)(z^2 + 1{,}912z + 0{,}9801)}{(z - 0{,}5342)(z^2 - 0{,}7479z + 0{,}6398)}. \tag{21}$$

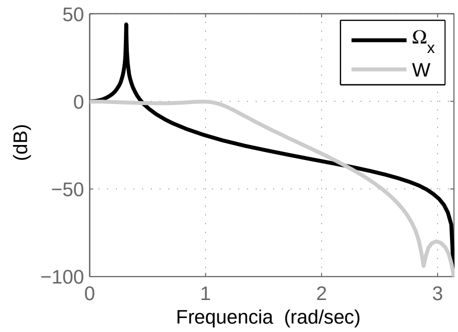

Figura 3: Magnitud del factor espectral de la fuente y del filtro de peso W.

La magnitud del factor espectral de x y la del filtro W se ilustran en la Figura 3. Además, se supone un canal con ruido de varianza unitaria, i.e., se supone $\sigma_q^2 = 1$.

En primer lugar se calcuó F_{opt}, obteniéndose

$$F_{\text{opt}} = \frac{4{,}1845(z^2 + 0{,}4383z + 0{,}3136)}{(z + 0{,}99)(z^2 + 1{,}912z + 0{,}9801)} \tag{22}$$

y

$$\sigma_{e_W}^2\big|_{F=F_{\text{opt}}} = \sigma_{\text{opt}}^2 = 0{,}0028, \quad \sigma_v^2\big|_{F=F_{\text{opt}}} = 2{,}1681 \cdot 10^5. \tag{23}$$

El diseño anterior no es razonable pues requiere una varianza a la entrada del canal del orden de 8700 veces la varianza de x. Supóngase sensato exigir al canal una varianza de entrada igual al doble de la varianza de x, i.e., elíjase $P = 49{,}6$. Para este valor de P, $\epsilon^* = 0{,}9997931$, el filtro óptimo está dado por

$$F_{\text{opt}}^P = F_{\text{opt}}^{49{,}6} = F_{0{,}9997931} = \frac{2{,}4752(z^2 - 0{,}1211z + 0{,}1985)}{(z + 0{,}3284)(z^2 + 0{,}8648z + 0{,}4555)}, \tag{24}$$

y

$$\sigma_{e_W}^2\big|_{F=F_{\text{opt}}^P} = \left[\sigma_{\text{opt}}^2\right]_P = 0{,}0123, \quad \sigma_v^2\big|_{F=F_{\text{opt}}^P} = 49{,}6. \tag{25}$$

Con lo anterior hemos reducido los requerimientos de varianza a la entrada del canal en un factor de 4371 y, como consecuencia de ello, el desempeño sólo ha empeorado en un factor de 4,4.

(Parte de) La curva de óptimos Pareto asociada al problema de minimizar el funcional vectorial

$$J_v \triangleq \left[||W(1-F)||_2^2 \quad ||F||_2^2 \right] \tag{26}$$

se ilustra en la Figura 4, donde se ha considerado el Lagrangiano definido en (13). Se indican los puntos correspondientes a $\epsilon = 1$ (primer caso considerado más arriba), $\epsilon = \epsilon^*$ (segundo caso

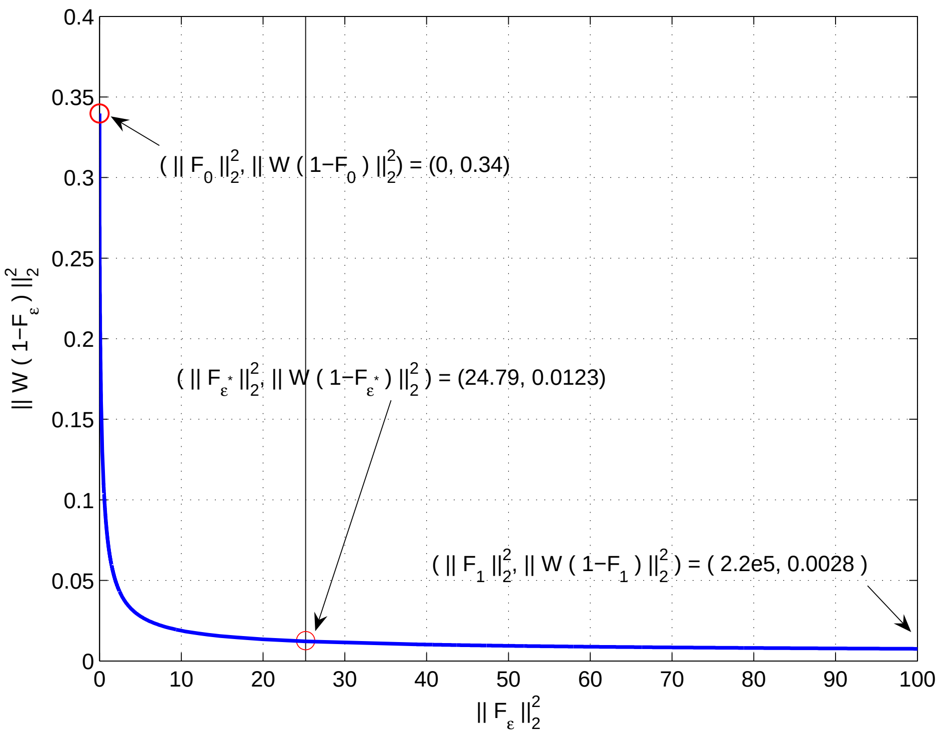

Figura 4: Curva de óptimos Pareto asociada al problema de minimizar el funcional vectorial $[||W(1-F)||_2^2, ||F||_2^2]$.

considerado) y, finalmente, el caso en que se elige $\epsilon = 0$. Este último caso corresponde a aquel en que sólo se optimiza $||F||_2^2$ y, por lo tanto, $F_0 = 0$. Se observa que es posible reducir bastante los requerimientos sobre la varianza a la entrada del canal (i.e., $||F||_2^2$) sin sacrificar demasiado en desempeño (i.e., $||W(1-F)||_2^2$).

Problema 2

Considere que una planta escalar G debe controlarse a través de un canal de comunicación con ruido blanco aditivo usando con realimentación. Para ello se sugiere utilizar la arquitectura de la Figura 5, donde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $K \in \mathcal{R}_p$ son parámetros de diseño.

Suponga que d_o es un proceso estocástico estacionario en sentido amplio, no correlacionado con q, y que los estados iniciales de K y G son variables aleatorias de segundo orden.

1. Pruebe que el esquema de la Figura 5 es equivalente al lazo de la Figura 6, donde:
   - $\bar{q}$ es ruido blanco de media cero, no correlacionado con d_o, y con una varianza $\sigma_{\bar{q}}^2$ que puede elegirse libremente en $\mathbb{R}^+$ (y que depende de los parámetros α y σ_q^2 de la Figura 5),

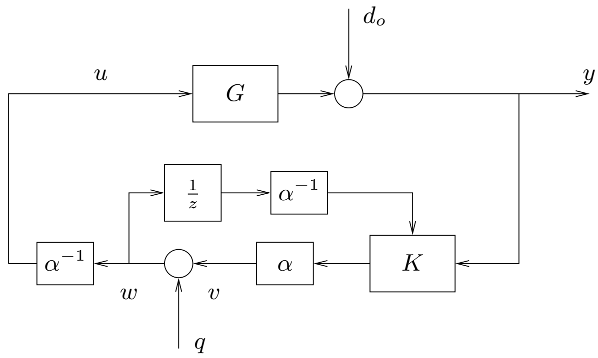

Figura 5: Lazo de control cerrado a través de canal con ruido blanco aditivo.

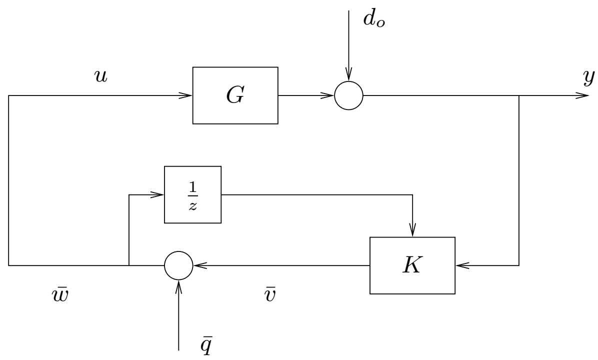

Figura 6: Reescritura equivalente del lazo de control de la Figura 5.

- y existe $\Gamma \in \mathbb{R}^+$ (que depende de los parámetros P y σ_q^2 del canal en la Figura 5) tal que

$$\gamma \triangleq \frac{\sigma_{\bar{v}}^2}{\sigma_{\bar{q}}^2} \leq \Gamma. \tag{27}$$

2. Reconsidere la Figura 5. Demuestre que se puede elegir $K \in \mathcal{R}_p$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de modo de garantizar estabilidad en el sentido cuadrático medio si y sólo si la cota Γ para γ en (27) satisface

$$\Gamma > \left(\prod_{i=1}^{n_p} |p_i|^2 \right) - 1, \tag{28}$$

donde $p_1, \cdots, p_{n_p}$ son los polos inestables de G.

3. Ilustre el punto anterior con Matlab/Simulink.

Solución:

1. El resultado es inmediato.

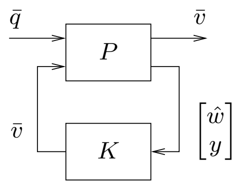

Figura 7: Lazo realimentado general

2. Basta probar que

$$\inf_{\substack{K\in\mathcal{S}\\ \sigma_{\bar{q}}^2\in\mathbb{R}^+}} \gamma = \left(\prod_{i=1}^{n_p} |p_i|^2\right) - 1, \tag{29}$$

donde

$$\mathcal{S} \triangleq \left\{K \in \mathcal{R}_p^{1\times 2} : \text{lazo de la Figura 6 es internamente estable y está bien definido}\right\}. \tag{30}$$

Primero notamos que, $\forall K \in \mathcal{S}$ y $\sigma_{\bar{q}}^2 \in \mathbb{R}^+$,

$$\gamma \triangleq \frac{\sigma_{\bar{v}}^2}{\sigma_{\bar{q}}^2} = \frac{||T_{d_o\bar{v}}\Omega_d||_2^2}{\sigma_{\bar{q}}^2} + ||T_{\bar{q}\bar{v}}||_2^2 \overset{(a)}{\geq} ||T_{\bar{q}\bar{v}}||_2^2\,, \tag{31}$$

donde T_{xy} denota a la transferencia entre x e y en la Figura 6. Independientemente de la elección de K, el lado izquierdo en (a) puede hacerse arbitrariamente cercano al lado derecho eligiendo $\sigma_{\bar{q}}^2$ suficientemente grande. Concluimos, entonces, que basta con probar que

$$\inf_{K\in\mathcal{S}} ||T_{\bar{q}\bar{v}}||_2^2 = \left(\prod_{i=1}^{n_p} |p_i|^2\right) - 1. \tag{32}$$

Para continuar, escribimos el problema de minimizar $||T_{\bar{q}\bar{v}}||_2^2$ en la forma estándar P-K de la Figura 7, donde[1]

$$\begin{bmatrix} \bar{v} \\ \hline \hat{w} \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \hline \bar{v} \end{bmatrix}, \tag{33}$$

con

$$P_{11} \triangleq 0, \quad P_{12} \triangleq 1, \quad P_{21} = P_{22} \triangleq \begin{bmatrix} z^{-1} \\ G \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Para usar la parametrización de Youla debemos hallar una factorización coprima para P_{22} y probar que $\mathcal{S}$ es no vacío:

[1] Note que d no importa. ¿Por qué?

- Si G no posee modos inestable ocultos, entonces se puede estabilizar el lazo de la Figura 6 con K tal que $\bar{v} = -K_2 y$, donde con K_2 es un controlador que estabiliza a G en un esquema estándar de control con un grado de libertad. Por lo tanto $\mathcal{S}$ es no vacío.
- Si G no posee modos inestable ocultos, entonces existen $N, D \in \mathcal{RH}_\infty$ coprimas, D bipropia y no cero, tales que $G = ND^{-1}$. Que N, D sean coprimas es equivalente a que existan $X, Y \in \mathcal{RH}_\infty$ tales que (ver Sección 5.4 en [6])

$$\begin{bmatrix} N & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 1. \tag{35}$$

  Construya las matrices

$$N_d \triangleq \begin{bmatrix} z^{-1}D \\ N \end{bmatrix}, \quad D_d \triangleq D, \quad N_i \triangleq \begin{bmatrix} z^{-1} \\ N \end{bmatrix}, \quad D_i \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}. \tag{36}$$

  Claramente, $N_d, D_d, D_i, N_i \in \mathcal{RH}_\infty$, D_i, D_d son bipropias y no singulares y $P_{22} = N_d D_d^{-1} = D_i^{-1} N_i$. Además, es fácil ver que

$$\begin{bmatrix} X & 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_d \\ N_d \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} D_i & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}Y \\ 0 & X \\ 0 & Y \end{bmatrix} = I, \tag{37}$$

  con

$$\begin{bmatrix} X & 0 & Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1}Y \\ 0 & X \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty. \tag{38}$$

  Por lo tanto, N_d, D_d, D_i, N_i forman factorizaciones coprimas de P_{22}.

En lo que sigue supondremos, sin pérdida de generalidad, que G no posee modos inestables ocultos (de otro modo $\mathcal{S} = \phi$ y el problema bajo consideración carecería de sentido).

Usando las definiciones anteriores, la parametrización de Youla permite escribir todas las transferencias $T_{\bar{q}\bar{v}}$ admisibles como sigue:

$$T_{\bar{q}\bar{v}} = Y_i N_d - DQN_i = X_i D - 1 - DQN_i, \tag{39}$$

donde $Q \in \mathcal{RH}_\infty$, $N_d, D_d, N_i, D_i \in \mathcal{RH}_\infty$ se han definido en (36) y $X_i, Y_i, X_d, Y_d \in \mathcal{RH}_\infty$ son tales que

$$\begin{bmatrix} X_i & -Y_i \\ -N_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_d & Y_d \\ N_d & X_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{40}$$

La segunda igualdad en (39) es consecuencia de (40) (note que, como G es escalar, D_d y X_i son escalares).

Defina

$$\xi_p \triangleq \prod_{i=1}^{n_p} \frac{1 - zp_i}{z - p_i}. \tag{41}$$

Claramente, $\xi_p D \in \bar{\mathcal{U}}_\infty$.

Con lo anterior podemos escribir

$$
\begin{aligned}
||T_{\bar{q}\bar{v}}||_2^2 &= ||1 - X_i D + DQN_i||_2^2 \\
&\overset{(a)}{=} \left|\left|\xi_p - X_i \xi_p D + \xi_p D Q \begin{bmatrix} z^{-1} \\ N \end{bmatrix}\right|\right|_2^2 \\
&\overset{(b)}{=} ||\xi_p - \xi_p(0)||_2^2 + \left|\left|\xi_p(0) - X_i \xi_p D + \xi_p D Q \begin{bmatrix} z^{-1} \\ N \end{bmatrix}\right|\right|_2^2, \qquad (42)
\end{aligned}
$$

donde (a) es consecuencia de que ξ_p es unitario y de la definición de N_i, y (b) es consecuencia de que $\xi_p \in \mathcal{RH}_2^\perp$ y $-X_i \xi_p D + \xi_p D Q \begin{bmatrix} z^{-1} \\ N \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty$. Analizamos ahora dos casos y, en cada uno de ellos, supondremos que G no posee polos ni ceros sobre el círculo (esto puede hacerse sin perder generalidad, pues la existencia de dichos polos ó ceros no afecta el valor de γ en el ínfimo. ¿Por qué?):

- G **bipropia**. En este caso, la matriz

$$N_i = \begin{bmatrix} z^{-1} \\ N \end{bmatrix} \qquad (43)$$

posee rango completo por columnas para todo $|z| \geq 1$. Por lo tanto, existe $M^\dagger \in \mathcal{RH}_\infty$ tal que $M^\dagger M = 1$. Como, además, $\xi_p D \in \mathcal{U}_\infty$ (recuerde que suponemos G sin polos ni ceros sobre el círculo), tenemos que la elección

$$Q = -(\xi_p D)^{-1} \left(\xi_p(0) - X_i \xi_p D\right) M^\dagger \in \mathcal{RH}_\infty \qquad (44)$$

logra anular el segundo término en (42). Por lo tanto, en este caso tenemos

$$
\begin{aligned}
\inf_{K \in \mathcal{S}} ||T_{\bar{q}\bar{v}}||_2^2 &= ||\xi_p - \xi_p(0)||_2^2 && (45)\\
&\overset{(a)}{=} 1 + |\xi_p(0)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{\xi_p(0) \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}_u} \xi_p \frac{dz}{z}\right\} && (46)\\
&\overset{(b)}{=} 1 + |\xi_p(0)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=z_i} \frac{\xi_p}{z}\right\} && (47)\\
&\overset{(c)}{=} 1 - 2\,|\xi_p(0)|^2 && (48)\\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n_p} \frac{1}{|p_i|^2}, && (49)
\end{aligned}
$$

donde en (a) $\mathcal{C}_u$ corresponde al círculo unitario orientado en sentido contra-reloj y la igualdad es consecuencia de la definición de $||\cdot||_2^2$ y de que ξ_p es unitario, en (b) $z_1, \cdots, z_k$ corresponden a los polos dentro del círculo unitario de $z^{-1}\xi_p$ y la igualdad es consecuencia del Teorema del Residuo, y (c) es consecuencia de que $z^{-1}\xi_p$ sólo posee un polo dentro del círculo unitario, a saber, un polo en $z = 0$. Concluimos que, en este caso, la aseveración del enunciado es falsa.

- G **estrictamente propia**. En este caso N_i posee rango deficiente en $z = \infty$. De (42) tenemos

$$||T_{\bar{q}\bar{v}}||_2^2 = ||\xi_p - \xi_p(0)||_2^2 + \left|\left|\xi_p(0) - \xi_p(\infty) + (\xi_p(\infty) - X_i\xi_p D) + \xi_p DQ \begin{bmatrix} z^{-1} \\ N \end{bmatrix}\right|\right|_2^2 \tag{50}$$

$$\stackrel{(a)}{=} ||\xi_p - \xi_p(0)||_2^2 + ||\xi_p(0) - \xi_p(\infty)||_2^2 + \left|\left|(\xi_p(\infty) - X_i\xi_p D) + \xi_p DQ \begin{bmatrix} z^{-1} \\ N \end{bmatrix}\right|\right|_2^2$$

$$\stackrel{(b)}{=} ||\xi_p - \xi_p(0)||_2^2 + ||\xi_p(0) - \xi_p(\infty)||_2^2 + \left|\left|z\left(\xi_p(\infty) - X_i\xi_p D\right) + \xi_p DQ \begin{bmatrix} 1 \\ zN \end{bmatrix}\right|\right|_2^2 \tag{51}$$

donde (a) es consecuencia de que $\xi_p(0) - \xi_p(\infty) \in \mathcal{RH}_2^{\perp}$ y de que, como G (y por lo tanto N) es estrictamente propia, (39) implica

$$\xi_p(\infty) - X_i\xi_p D \in \mathcal{RH}_2 \tag{52}$$

y, por lo tanto, $(\xi_p(\infty) - X_i\xi_p D) + \xi_p DQ \begin{bmatrix} z^{-1} \\ N \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_2$, y (b) es consecuencia de que z es unitario.

Si se elige

$$Q = -z\left(\xi_p D\right)^{-1}\left(\xi_p(\infty) - X_i\xi_p D\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty, \tag{53}$$

se anulará el último término en (50). Por lo tanto,

$$\underset{K\in\mathcal{S}}{\text{ínf}}\, ||T_{\bar{q}\bar{v}}||_2^2 = ||\xi_p - \xi_p(0)||_2^2 + ||\xi_p(0) - \xi_p(\infty)||_2^2 \tag{54}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n_p}\frac{1}{|p_i|^2} + \left(\xi_p(0) - \xi_p(\infty)\right)^2 \tag{55}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n_p}|p_i|^2\right) - 1. \tag{56}$$

Concluimos que el resultado es válido para plantas estrictamente propias.

En resumen, si G es estrictamente propia y no posee polos ni ceros sobre el círculo, y K se elige de acuerdo a

$$K = K_{\text{ínf}} \triangleq \left(X_i - Q_{\text{ínf}}N_i\right)^{-1}\left(Y_i - Q_{\text{ínf}}D_i\right), \tag{57}$$

con

$$Q_{\text{ínf}} = -z\left(\xi_p D\right)^{-1}\left(\xi_p(\infty) - X_i\xi_p D\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{58}$$

entonces $\gamma \to \gamma_{\text{ínf}} \triangleq \left(\prod_{i=1}^{n_p}|p_i|^2\right) - 1$ para $\sigma_{\bar{q}}^2 \to \infty$ (equivalentemente, para $\alpha \to 0$).

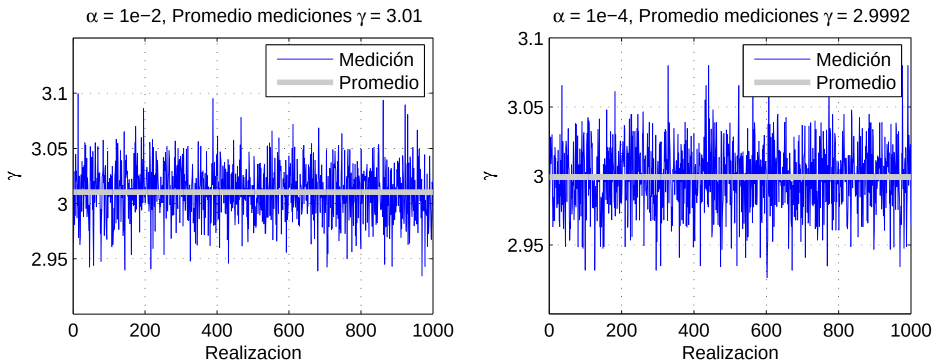

Figura 8: Relación señal a ruido γ para 1000 realizaciones de d_o y q, y el promedio correspondiente.

3. Para ilustrar lo anterior, se elige

$$G = \frac{1}{z(z-2)}, \tag{59}$$

y d_o igual a una secuencia de ruido blanco de varianza unitaria. En base al desarrollo de la parte anterior, es posible concluir que

$$\gamma_{\text{ínf}} \triangleq \inf_{K \in \mathcal{S}} \gamma = 3, \tag{60}$$

$$K_{\text{ínf}} \triangleq \arg \inf_{K \in \mathcal{S}} \gamma = \begin{bmatrix} \frac{-1,5(z-0,5021)(z^2+0,3616z+0,18)(z^2-0,9702z+1,492)}{z(z-0,4823)^2(z-0,2222)(z-0,146)} \\ \\ \frac{-2,6666(z-0,5021)(z^2+0,3401z+0,1829)(z^2-1,654z+1,652)}{z(z-0,4823)^2(z-0,2222)(z-0,146)} \end{bmatrix}^T, \tag{61}$$

$$T^{\text{ínf}}_{\bar{q}\bar{v}} \triangleq T_{\bar{q}\bar{v}}|_{K=K_{\text{ínf}}} = \frac{-1,5}{(z-0,5)}. \tag{62}$$

Note que, como es de esperarse, $\left|\left|T^{\text{ínf}}_{\bar{q}\bar{v}}\right|\right|_2^2 = \gamma_{\text{ínf}} = 3$.

La Figura 8 muestra la relación señal a ruido γ para 1000 realizaciones de d_o y q considerando $K = K_{\text{ínf}}$ y dos valores para α: $\alpha = 0{,}01$ y $\alpha = 0{,}0001$. Consistente con los resultados de la parte anterior, se observa que a medida que $\alpha \to 0$, equivalentemente, $\sigma^2_{\bar{q}} \to \infty$, el promedio de las mediciones de γ tiende a $\gamma_{\text{ínf}} = 3$.

Referencias

[1] S. Boyd and C. Barratt. *Linear Controller Design: Limits of Performance*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.

[2] J.H. Braslavsky, R.H. Middleton, and J.S. Freudenberg. Feedback stabilization over signal-to-noise ratio constrained channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(8):1391–1403, 2007.

[3] M.S. Derpich, E.I. Silva, D.E. Quevedo, and G.C. Goodwin. On optimal perfect reconstruction feedback quantizers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(8):3871–3890, August 2008.

[4] A. Goldsmith. *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2005.

[5] M. Vidyasagar. *Control Systems Synthesis: A Factorization Approach*. MIT Press, Cambridge, USA, 1985.

[6] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, 1996.