
Quinta Tarea IPD-462

10 de Junio de 2009

1. Generalidades

- La tarea es de carácter individual.
- El formato es libre.
- Referencias sugeridas y lecturas complementarias: [1, 3, 4, 6, 9, 10].
- **La notación utilizada más abajo corresponde a la notación definida en clases.**
- **Fecha de entrega (límite):** 25 de Junio 2009, 10:00AM.

2. Cuestionario

Problema 1

Considere que la planta escalar

$$G(z) = \frac{az - c}{z(z - p)}, \quad a, c, p \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

debe controlarse de modo de seguir, sin error estacionario, una referencia de naturaleza constante en presencia de perturbaciones de salida tipo delta de dirac.¹ Para ello se sugiere utilizar la estrategia de control de la Figura 1, donde u es la entrada de la planta, y es la salida de la planta, r es la referencia, \bar{d} es la perturbación de salida, y $K \in \mathcal{R}_p^{1 \times 3}$ es tal que

$$u = [K_1 \quad K_2 \quad K_3] \begin{bmatrix} d \\ r \\ y \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Defina el conjunto

$$\mathcal{S} \triangleq \{K \in \mathcal{R}_p^{1 \times 3} : \text{lazo de la Figura 1 internamente estable y bien definido}\}, \quad (3)$$

y los subconjuntos de \mathcal{S} siguientes:

$$\mathcal{S}_1 \triangleq \{K \in \mathcal{S} : K_1 = 0, K_3 = -K_2, K_2 \in \mathcal{R}_p^{1 \times 1}\}, \quad (4)$$

$$\mathcal{S}_2 \triangleq \{K \in \mathcal{S} : K_1 = 0, K_2 \in \mathcal{R}_p^{1 \times 1}, K_3 \in \mathcal{R}_p^{1 \times 1}\}, \quad (5)$$

$$\mathcal{S}_3 \triangleq \mathcal{S}. \quad (6)$$

¹ $\delta(0) = a < \infty$ y $\delta(k) = 0$ para $k > 0$.

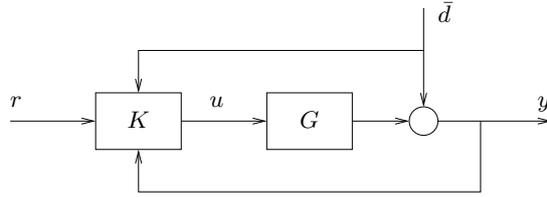


Figure 1: Lazo de control del Problema 1.

Considere el funcional

$$J \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} (r(k) - y(k))^2 \quad (7)$$

y defina

$$J_i^{\text{opt}} \triangleq \inf_{K \in \mathcal{S}_i} J, \quad K_i^{\text{opt}} \triangleq \arg \inf_{K \in \mathcal{S}_i} J, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (8)$$

1. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ muestre cómo reducir el problema de hallar J_i^{opt} a alguna de las formulaciones estándar vistas en clase.
2. Considere el caso en que $a = 0$ y $c < 0$. Use Matlab para trazar las curvas $\mathcal{C}_i(p) \triangleq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = p, y = J_i^{\text{opt}}\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, cuando $p > 1$ y, además, cuando $0 \leq p < 1$.
3. Considere el caso en que $a = 1$. Use Matlab para trazar las superficies $\mathcal{M}_i(p, c) \triangleq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = p, y = c, z = J_i^{\text{opt}}\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, para los casos siguientes: (i) $0 \leq c < 1$ y $0 \leq p < 1$, (ii) $0 \leq c < 1$, $p > 1$, (iii) $c > 1$ y $0 \leq p < 1$, (iv) $c > 1$ y $p > 1$.
4. Los conjuntos \mathcal{S}_i contienen controladores con distintos grados de complejidad (también llamados grados de libertad). En particular, \mathcal{S}_i posee i grados de libertad. Use las figuras anteriores para establecer ventajas y/o desventajas de usar controladores con más de un grado de libertad en el control de G . (**Ayuda:** Sus conclusiones debiesen quedar en función del grado relativo y la ubicación de polos y ceros de G . Note que, en algunos casos, los K_i^{opt} pueden ser iguales, independientemente de i .)

Solución

1. Considere la Figura 1 y defina

$$d \triangleq \begin{bmatrix} r \\ \bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_o \mu(k) \\ d_o \delta(k) \end{bmatrix}, \quad e \triangleq r - y. \quad (9)$$

Si el lazo de la Figura 1 es estable, entonces el Teorema de Parseval permite escribir el funcional J en la forma

$$J = \|T_{de}D\|_2^2, \quad (10)$$

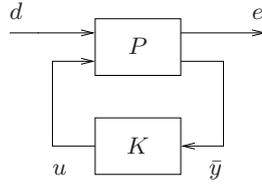


Figure 2: Lazo generalizado.

donde T_{de} corresponde a la transferencia entre d y e en la Figura 1, y

$$D \triangleq \mathcal{Z}\{d\} = [r_0 z(z-1)^{-1} \quad d_0]^T. \quad (11)$$

(Si el lazo no es estable, entonces $J = \infty$.)

Para caracterizar las transferencias T_{de} alcanzable en el lazo de la Figura 1, cuando el controlador es estabilizante y tal que el lazo resultante está bien definido, utilizaremos la parametrización de Youla.

Consider el lazo de control generalizado de la Figura 2, donde $P \in \mathcal{R}_p$ y $K \in \mathcal{R}_p$. Particione P de modo tal que

$$\begin{bmatrix} e \\ \bar{y} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix}, \quad (12)$$

Theorem 1 (Vea, e.g., [2, 5, 9, 10]) *Considere el lazo de la Figura 2, donde $P \in \mathcal{R}_p$ y suponga que existe $K \in \mathcal{R}_p$ tal que el lazo resultante es internamente estable y está bien definido. Considere una factorización coprime de P_{22} (vea (12)) en \mathcal{RH}_∞ , i.e., considere $X_i, Y_i, X_d, Y_d, N_i, D_i, N_d, D_d \in \mathcal{RH}_\infty$, con X_i, X_d, D_i, D_d cuadradas y bipropias, tales que*

$$P_{22} = N_d D_d^{-1} = D_i^{-1} N_i \quad (13)$$

y

$$\begin{bmatrix} X_i & -Y_i \\ -N_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_d & Y_d \\ N_d & X_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Entonces:

- (a) T_{de} es alcanzable con un controlador que estabiliza internamente el lazo de la Figura 2 y lo vuelve bien definido, si y sólo

$$T_{de} = T_{de}^o - P_{12} D_d Q D_i P_{21}, \quad T_{de}^o \triangleq P_{11} + P_{12} D_d Y_i P_{21}, \quad (15)$$

donde $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ es un parámetro libre.

- (b) En (15), las funciones de transferencia $T_{de}^o, P_{12} D_d$ y $D_i P_{21}$ son funciones en \mathcal{RH}_∞ . $\square\square$

A continuación mostraremos cómo el Teorema 1 permite escribir el funcional J en (10) en la forma estándar $J = \|A - BX\|_2^2$, con A y B funciones dadas en \mathcal{RH}_∞ y X variable de decisión en \mathcal{RH}_∞ , para cada uno de los casos considerados en el enunciado. Por simplicidad, no consideraremos el caso en que $p = 1$ y/o $c = a \neq 0$.

(a) Caso 1: En este caso $K \in \mathcal{S}_1$, i.e.,

$$u = K_2(r - y). \quad (16)$$

Por lo tanto, el lazo de la Figura 1 puede escribirse en la forma estándar de la Figura 2 con $\bar{y} = e$ y

$$P_{11} = P_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = P_{22} = -G. \quad (17)$$

Considere una factorización coprima de $P_{22} = -G = ND^{-1}$, donde N y D son escalares en \mathcal{RH}_∞ tales que

$$-NY + DX = 1 \quad (18)$$

para ciertos $X, Y \in \mathcal{RH}_\infty^{1 \times 1}$. Usando el Teorema 1 concluimos que, en este caso, todas las funciones T_{de} admisibles pueden escribirse como

$$T_{de} = (1 + NY - NDQ) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Como la planta no posee integración, garantizar un funcional J finito para cualquier combinación de valores de r_o y d_o , es equivalente a

$$\{1 + NY - NDQ\}|_{z=1} = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{N(1)Y(1) + 1}{N(1)D(1)} + \frac{z-1}{z} \tilde{Q}, \quad (20)$$

donde $\tilde{Q} \in \mathcal{RH}_\infty$ es la nueva variable de decisión. Las ecuaciones (19) y (20) permiten escribir (10) en la forma

$$J = \left\| A - B\tilde{Q} \right\|_2^2, \quad (21)$$

donde

$$A \triangleq \left(1 + NY - ND \frac{N(1)Y(1) + 1}{N(1)D(1)} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_o z (z-1)^{-1} \\ d_o \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$B \triangleq \frac{z-1}{z} ND \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_o z (z-1)^{-1} \\ d_o \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Note que, por construcción, el polo en $z = 1$ de la transformada zeta de la referencia se cancela tanto en A como en B . En consecuencia, $A, B \in \mathcal{RH}_\infty$ como se necesita.

(b) Caso 2: En este caso $K \in \mathcal{S}_2$, i.e.,

$$u = \begin{bmatrix} K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Por lo tanto, el lazo de la Figura 1 puede escribirse en la forma estándar de la Figura 2 con $\bar{y} = [r \ y]^T$ y

$$P_{11} = [1 \ -1], \quad P_{12} = -G, \quad P_{21} = I, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Considere una factorización coprima de $G = ND^{-1}$, donde N y D son escalares en \mathcal{RH}_∞

$$-NY + DX = 1 \quad (26)$$

para ciertos $X, Y \in \mathcal{RH}_\infty^{1 \times 1}$. Si se define

$$N_d \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}, \quad N_i \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}, \quad D_d \triangleq D, \quad D_i \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$X_i \triangleq X, \quad Y_i \triangleq [0 \ Y], \quad X_d \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}, \quad X_i \triangleq Y_d [0 \ Y], \quad (28)$$

entonces se satisfarán (13) y (14). Por lo tanto, el Teorema 1 permite concluir que, en este caso, todas las funciones T_{de} admisibles pueden escribirse como

$$T_{de} = [1 + NQ_1 \quad -1 - NY + NDQ_2], \quad (29)$$

donde $Q \triangleq [Q_1 \ Q_2]$.

Como la planta no posee integración, garantizar un funcional J finito para cualquier combinación de valores de r_o y d_o , es equivalente a

$$\{1 + NQ_1\}|_{z=1} = 0 \Leftrightarrow Q_1 = -\frac{1}{N(1)} + \frac{z-1}{z} \tilde{Q}_1, \quad (30)$$

donde $\tilde{Q}_1 \in \mathcal{RH}_\infty$ junto a Q_2 corresponden a las nuevas variables de decisión del problema. Las ecuaciones (29) y (30) permiten escribir (10) en la forma

$$J = \left\| A - B \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2, \quad (31)$$

donde

$$A \triangleq (1 - NN(1)^{-1}) r_o z(z-1)^{-1} - (1 + NY) d_o \quad (32)$$

$$B \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z-1}{z} N r_o z(z-1)^{-1} & N D d_o \end{bmatrix}. \quad (33)$$

De nuevo, el polo en $z = 1$ de la transformada zeta de la referencia se cancela tanto en A como en B . En consecuencia, $A, B \in \mathcal{RH}_\infty$ como se necesita.

(c) Caso 3: Procediendo de modo análogo al del caso anterior, se puede escribir

$$J = \left\| A - B \begin{bmatrix} \tilde{Q}_2 \\ Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix} \right\|_2^2, \quad (34)$$

donde

$$A \triangleq (1 - NN(1)^{-1}) r_o z(z-1)^{-1} - (1 + NY)d_o \quad (35)$$

$$B \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z-1}{z} N r_o z(z-1)^{-1} & N D d_o & N D d_o \end{bmatrix}. \quad (36)$$

De nuevo, $A, B \in \mathcal{RH}_\infty$ como se necesita.

2. y 3. Resultados típicos se ilustran a continuación para $r_o = 1$ (Caso i se refiere al caso en que $K \in \mathcal{S}_i$. Comentarios se entregan en la Parte 4):

- Para $a = 0$, $c = -1$ y $d_o \in \{0, 3\}$ se obtuvo la siguiente gráfica para J_i^{opt} en función de $p \in [0, 2]$:

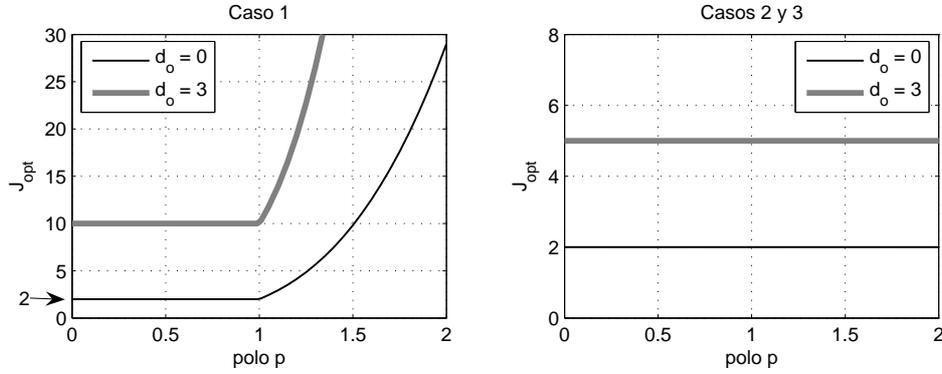


Figure 3: Resultados para $a = 0$, $c = -1$ y $d_o \in \{0, 3\}$.

- Para $a = 1$, $c \in \{0.3, 0.7\}$ y $d_o \in \{0, 3\}$ se obtuvo la siguiente gráfica para J_i^{opt} en función de $p \in [0, 2]$:

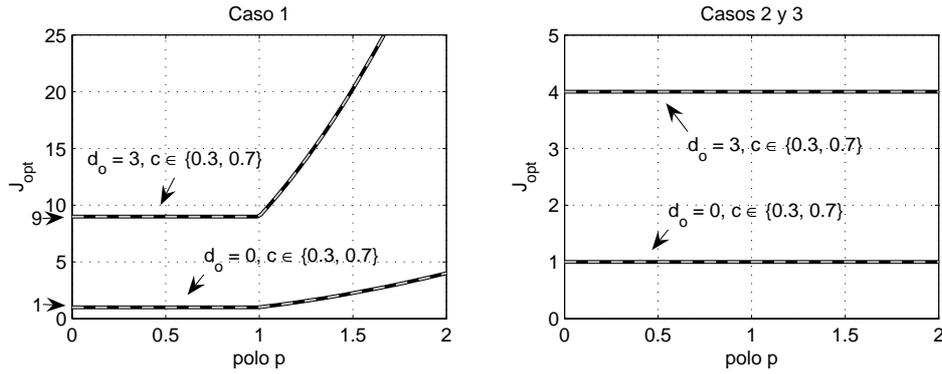


Figure 4: Resultados para $a = 1$, $c \in \{0.3, 0.7\}$ y $d_o \in \{0, 3\}$.

- Para $a = 1$, $p \in \{0.3, 0.7\}$ y $d_o \in \{0, 3\}$ se obtuvo la siguiente gráfica para J_i^{opt} en función de $c \in [0, 2]$:

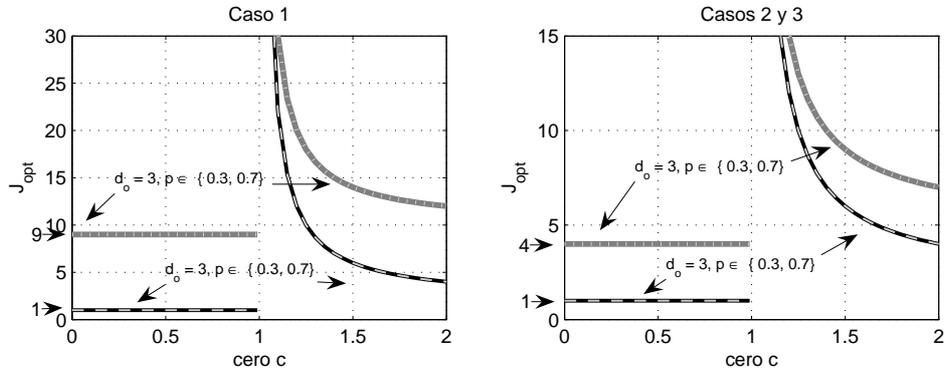


Figure 5: Resultados para $a = 1$, $p \in \{0.3, 0.7\}$ y $d_o \in \{0, 3\}$.

- Para $a = 1$, $p = 1.2$ y $d_o = 0$ se obtuvo la siguiente gráfica para J_i^{opt} en función de $c \in [0, 2]$:

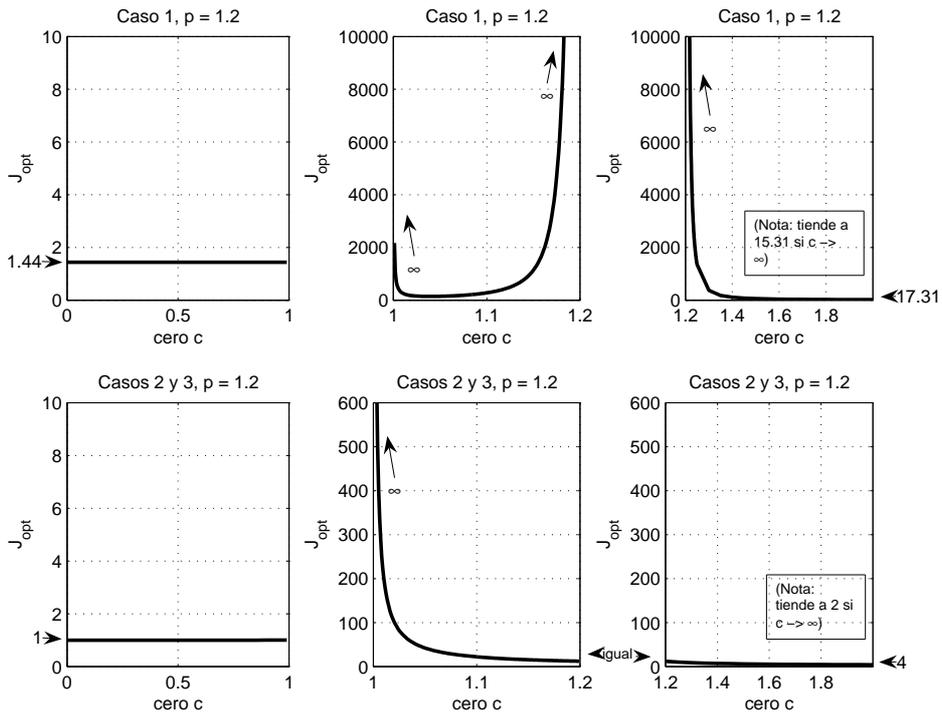


Figure 6: Resultados para $a = 1$, $p = 1.2$ y $d_o = 0$.

4. Los resultados de la parte anterior muestran que el uso de un controlador con tres grados de libertad (Caso 3 en que $K \in \mathcal{S}_3$) no se justifica en este caso. Claramente, esta conclusión está ligada al tipo de perturbación considerada. Como consecuencia de lo anterior, sólo discutiremos los casos en que el controlador posee uno o dos grados de libertad.

En el caso de controladores con sólo un grado de libertad, es evidente que el grado relativo influye en el desempeño alcanzable. A mayor grado relativo, peor es el desempeño alcanzable. Asimismo, la presencia de ceros de FNM cercanos a $z = 1$ y polos inestable de gran magnitud deterioran grandemente el desempeño alcanzable. Esto es consistente con limitaciones fundamentales clásicas (vea, e.g., [8]). Por otro lado, la ubicación de polos estables y ceros de FM no influye en el mejor desempeño alcanzable. Un caso especialmente interesante es aquel en el que la planta posee un cero de FNM c y un polo inestable p . En este caso, el valor del funcional óptimo tiende a infinito no sólo para $c \rightarrow 1$ y $p \rightarrow \infty$, sino también para $c \approx p$. Es decir, cuasi-cancelaciones de polos y ceros inestable son perjudiciales para el desempeño del lazo. Esto es natural.

Note que todo lo anterior es consistente con que, para controladores de un grado de libertad, $d_o = 0$, y una planta como la considerada aquí con $a \in \{0, 1\}$, $p \neq 1$ y, si $a = 1$, $c \neq 1$ y $p \neq c$, el costo óptimo para $K \in \mathcal{S}_1$ satisface

$$J_1^{\text{opt}} = \text{grel}\{G\} + \begin{cases} 0 & \text{si } |c| < 1 \text{ ó } a = 0 \\ \frac{|c|^2 - 1}{|c - 1|^2} & \text{si } |c| > 1 \text{ y } a = 1 \end{cases} \quad (37)$$

$$+ \begin{cases} 0 & \text{si } |p| < 1 \\ [1 - \xi(p)]^2 \frac{p+1}{p-1} & \text{si } |p| > 1 \end{cases}, \quad (38)$$

donde

$$\xi \triangleq \begin{cases} z^{\text{grel}\{G\}} & \text{si } |c| < 1 \text{ ó } a = 0 \\ z^{\text{grel}\{G\}} \left(\frac{1 - zc}{z - c} \right) & \text{si } |c| > 1 \text{ y } a = 1 \end{cases} \quad (39)$$

(vea detalles en [7]).

En el caso de usar un controlador con dos grados de libertad, el comportamiento cualitativo del funcional óptimo ante variaciones en el grado relativo y la ubicación de polos y ceros estables o de FNM de la planta, es similar al del caso anterior. Sin embargo, los polos inestable no juegan rol alguno en el desempeño óptimo. Ésta es una de las principales ventajas de utilizar un controlador con dos grados de libertad. Este fenómeno puede entenderse fácilmente si se considera el caso particular de controlador de dos grados de libertad ilustrado en la Figura 7. Por simplicidad supondremos que $d_o = 0$ y que existe C bipropio y de fase mínima que estabiliza a G .² En estas condiciones, la transferencia entre \bar{r} e y en la Figura 7, digamos $T_{\bar{r}y}$, es invertible excepto por los ceros de FNM de la planta que aparecen como ceros de $T_{\bar{r}y}$, y por el hecho de que dicha transferencia tiene el grado relativo de la planta. Por lo tanto, H puede elegirse de modo que $HT_{\bar{r}y} = z^{-\text{grel}\{G\}} \prod_{i=1}^{n_c} (z - c_i)(1 - zc_i)$, donde c_i corresponde al i -ésimo cero de FNM de G . De lo anterior resulta evidente que los polos inestable de la planta (que obviamente juegan un papel importante en la elección de C), no tienen relevancia si el foco se centra en la transferencia entre r e y , i.e., en $HT_{\bar{r}y}$ (tal como en nuestro caso). Otra ventaja de utilizar dos grados de

²En general, dicho controlador existe. Sin embargo probarlo requiere un poco más de análisis que el necesario para ilustrar el punto de interés aquí.

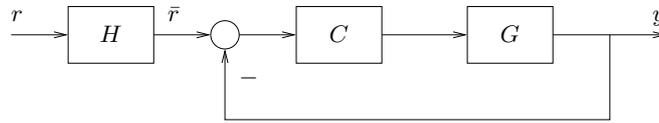


Figure 7: Caso especial de un lazo de control con dos grados de libertad.

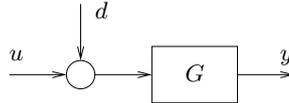


Figure 8: Planta considerada en el Problema 2.

libertad radica en que el efecto de la perturbación se hace menos importante en comparación al caso analizado anteriormente.

Problema 2

Considere la planta escalar de la Figura 8 donde u corresponde a la entrada, y a la salida y d a una perturbación constante (determinística, pero no medible).

1. Proponga una estrategia de control de horizonte móvil para controlar G utilizando sólo mediciones de u e y , de modo de satisfacer

$$u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \quad y_{\min} \leq \hat{y}(k) \leq y_{\max}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (40)$$

(Note que la condición (40) es sobre \hat{y} , i.e., sobre la salida del modelo de predicción, y no sobre la salida del sistema y . ¿Por qué no es fácil garantizar $y_{\min} \leq y(k) \leq y_{\max}$?).

2. Considere una planta de fase no mínima e ilustre su propuesta con Matlab.

Solución

1. Para usar MPC en este caso, la formulación estudiada en clase debe modificarse de modo de tomar en cuenta el que existe una perturbación a la entrada de la planta y el que el estado de la misma no es medible. Existen varias maneras de abordar el problema. Una de ellas se describe en [3, Capítulo 5]. Aquí consideramos una estrategia sencilla inspirada en el Problema 1 de la Tarea 2.

Modelamos la perturbación a la entrada de la planta como la salida del sistema auxiliar

$$x_d(k+1) = x_d(k), \quad x_d(0) = d_o \quad (41)$$

$$d(k) = x_d(k). \quad (42)$$

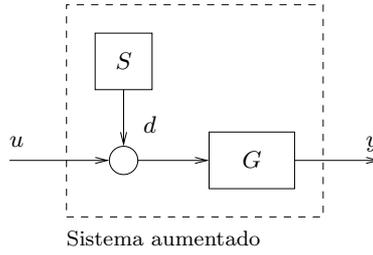


Figure 9: Sistema aumentado definido en la solución del Problema 2.

Si $(A, B, C, 0)$ corresponde a una realización mínima de la planta G , y $x_{G,o}$ denota a su estado inicial, entonces

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\triangleq A_a} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq B_a} u(k), \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{G,o} \\ d_o \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq C_a} x(k) \quad (44)$$

corresponde a una representación en variables de estado del sistema aumentado de la Figura 9. Note que las dos primeras componentes de x corresponden al estado de la planta G (i.e., x_G), y la tercera componente de x corresponde a la perturbación d .

Considere ahora un observador O para el sistema aumentado en (43)–(44):

$$\hat{x}(k+1) = A_a \hat{x}(k) + B_a u(k) + J(y(k) - C_a \hat{x}(k)), \quad (45)$$

donde J se elige de modo que $A_a - JC_a$ sea estable. Este observador es tal que $\hat{x}(k) \rightarrow x(k)$ con $k \rightarrow \infty$. En consecuencia, las dos primeras componentes de \hat{x} convergerán al estado de la planta x_G , y la tercera componente de \hat{x} , digamos \hat{d} , convergerá al valor de la perturbación d_o .

Se propone utilizar la estimación de d para definir la entrada de la planta como

$$u \triangleq u_c - \hat{d}, \quad (46)$$

donde u_c corresponde a una entrada auxiliar. Así, el sistema resultante puede representarse como en la Figura 10. Dado que $\hat{d} \rightarrow d_o$, resulta evidente que la entrada del bloque G en la Figura 10, digamos u_G , es tal que $u_G(k) \rightarrow u_c(k)$ con $k \rightarrow \infty$. Por lo tanto, es razonable pensar en elegir la señal u_c en (46) como la salida de un controlador **que ha sido sintonizado para G , sin considerar la perturbación d** . En nuestro caso, este controlador corresponde a una estrategia de horizonte móvil idéntica a la considerada en clase, pero que usa el estado observado de la planta, i.e., \hat{x}_G , en vez de mediciones del estado real.³ Para efectos del diseño de esta ley de control supondremos que durante el horizonte de predicción asociado a cada k , $\hat{d}(i)$ se mantiene constante y, además, $\hat{d}(i) = d_o$, i.e., supondremos que $u_G(i) = u_c(i)$.

³En la Tarea 2, este controlador correspondía a una ganancia estática de realimentación del estado observado.

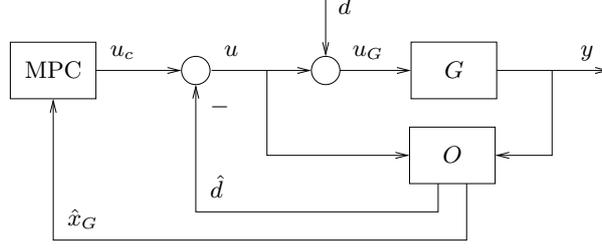


Figure 10: Arquitectura de control propuesta.

El funcional considerado en cada instante de muestreo corresponde a⁴

$$J_N(\hat{x}_G(k), \bar{\mathbf{u}}_c) \triangleq \bar{x}_G(k+N)^T P \bar{x}_G(k+N) + \sum_{i=k}^{k+N-1} \{ \bar{x}_G(i)^T Q \bar{x}_G(i) + \bar{u}_c(i)^T R \bar{u}_c(i) \}, \quad (47)$$

donde $Q \geq 0$, $R \geq 0$, $P \geq 0$,

$$\bar{x}_G(i+1) \triangleq A \bar{x}_G(i) + B \bar{u}_c(i), \quad \bar{x}_G(k) \triangleq \hat{x}_G(k), \quad i \in \{k, \dots, k+N-1\} \quad (48)$$

y

$$\bar{\mathbf{u}}_c \triangleq [\bar{u}_c(k) \quad \dots \quad \bar{u}_c(k+N-1)]^T. \quad (49)$$

Note que, consistente con la suposición mencionada al final del párrafo anterior, la formulación anterior no incluye a d ni a \hat{d} .

Defina

$$\mathbf{u}_{\max} \triangleq \begin{bmatrix} u_{\max} \\ \vdots \\ u_{\max} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{\min} \triangleq \begin{bmatrix} u_{\min} \\ \vdots \\ u_{\min} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

y

$$\hat{\mathbf{d}} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{d}(k) \\ \vdots \\ \hat{d}(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{y}(k+1) \\ \vdots \\ \bar{y}(k+N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{\max} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{y}_{\max} \\ \vdots \\ y_{\max} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{\min} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{y}_{\min} \\ \vdots \\ y_{\min} \end{bmatrix}, \quad (51)$$

donde

$$\bar{y}(k) \triangleq C \bar{x}_G(k). \quad (52)$$

⁴A diferencia de la notación de clases, aquí \bar{x} corresponde a la predicción de x (así se evita confusión con las estimaciones \hat{x} provistas por el observador).

Con las definiciones anteriores, y usando las ideas descritas inmediatamente después de (46), definimos la secuencia u_c vía

$$u_c(k) \triangleq [1 \quad 0] \underset{\substack{\bar{\mathbf{u}}_c \in \mathbb{R}^N \\ \text{sujeto a: (48)} \\ \mathbf{u}_{\min} \leq \bar{\mathbf{u}}_c - \hat{\mathbf{d}} \leq \mathbf{u}_{\max} \\ \mathbf{y}_{\min} \leq \bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y}_{\max}}}{\arg \min}} J_N(\hat{x}_G(k), \bar{\mathbf{u}}_c), \quad (53)$$

Note que se ha considerado el que la señal de actuación u está dada por (46) y, por lo tanto, la señal $u = u_c - \hat{d}$ (y no u_c) es la que debe satisfacer $u_{\min}(k) \leq u(k) \leq u_{\max}(k)$. Asimismo, se ha considerado el que $\hat{d}(k)$ es constante en todo el horizonte de predicción (vea la definición de $\hat{\mathbf{d}}$). Procediendo como en el caso analizado en clases, es posible re-escribir (53) en la forma estándar

$$u_c(k) = [1 \quad 0] \underset{\substack{\bar{\mathbf{u}}_c \in \mathbb{R}^N \\ L\bar{\mathbf{u}}_c \leq W}}{\arg \min}} \{ \bar{\mathbf{u}}_c^T H \bar{\mathbf{u}}_c + \bar{\mathbf{u}}_c^T F \hat{x}_G(k) \}, \quad (54)$$

donde L, W, H y F son matrices apropiadas.

En resumen, la ley de control propuesta corresponde a la ilustrada en la Figura 10 donde, para cada instante de muestreo k , la salida del bloque MPC corresponde a $u_c(k)$ en (54).

2. Para ilustrar la estrategia de control propuesta en la parte anterior, consideramos la planta (inestable y de fase no mínima)

$$G(z) = \frac{(z - 1.05)}{(z - 1.1)(z - 0.6)}, \quad (55)$$

con realización mínima $(A, B, C, 0)$ y estado inicial aleatorio, y un observador como en (45) ajustado mediante asignación de polos con el objeto de lograr $A_a - JC_a$ con autovalores en $\{0.4, 0.3, 0\}$. El funcional considerado es (47) con $N = 10, Q = I, R = 100I$ y P tal que

$$P = A^T P A + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A. \quad (56)$$

Se examinaron tres conjuntos de valores para (u_{\min}, u_{\max}) y (y_{\min}, y_{\max}) :

- Caso 1 $((u_{\min}, u_{\max}) = (-\infty, \infty), (y_{\min}, y_{\max}) = (-\infty, \infty))$: En este primer caso se omitieron restricciones sobre la entrada y la salida de la planta. El resultado de aplicar la estrategia propuesta, cuando la perturbación es una secuencia de escalones, se ilustra en la Figura 11. Las excursiones de tanto u como y son bastante vigorosas y se observa cero error estacionario. Asimismo, las estimaciones de los estados de la planta, y aquella de la perturbación, también convergen a los valores correctos a medida que k crece.
- Caso 2 $((u_{\min}, u_{\max}) = (-10, 10), (y_{\min}, y_{\max}) = (-\infty, \infty))$: En este caso se introducen restricciones en u . Se optó por límites del orden de un quinto de los máximos y mínimos de la actuación obtenida en el caso anterior. Los resultados se ilustran en la Figura 12. Aún cuando la actuación se hace mucho menos vigorosa que en el caso anterior, el tiempo de asentamiento no se altera en forma perceptible. De nuevo, los errores de estimación y de seguimiento son cero en estado estacionario.

- Caso 3 ($(u_{\min}, u_{\max}) = (-10, 10)$, $(y_{\min}, y_{\max}) = (-5, 5)$): Refiérase a las Figuras 13 y 14. Se observa comportamiento similar al caso anterior, pero ahora la salida de la planta manifiesta excursiones dentro de los límites impuestos (y que se eligieron aproximadamente iguales a un cuarto de las excursiones máximas y mínimas de y en el caso anterior). Note que la restricción sobre y hace que la actuación también sea más cautelosa. Esto es natural. Note también que hay intervalos en que y supera los límites impuestos. Esto se debe a que sólo se limitan las predicciones en el problema (y no la salida real). Más encima, esto se hace suponiendo la perturbación constante, e igual a la estimación entregada por el observador, durante todo el horizonte de predicciones.

En todos los casos anteriores se obtuvo un lazo cerrado estable, aún cuando no se consideró restricción alguna sobre el estado terminal en la formulación del problema de optimización (note, además, que las pruebas de estabilidad estudiadas en clase no consideran perturbaciones de ninguna índole). La experiencia muestra que, usualmente, basta elegir P apropiadamente (i.e., como en (56)) para garantizar estabilidad. La elección trivial $P = 0$, junto a horizontes pequeños, suele desembocar en lazos inestables. Esto se ilustra a continuación:

- Caso 4: En este caso la elección de parámetros es como en el Caso 3 descrito más arriba, pero considerando $N = 2$, $P = 0$ y $-u_{\min} = u_{\max} = 10$. Los resultados se ilustran en la Figura 15. El lazo resultante es inestable.
- Caso 5: En este caso la elección de parámetros es como en el Caso 4, pero P se elige como en (56). Los resultados se ilustran en la Figura 16, donde se aprecia un lazo cerrado estable.

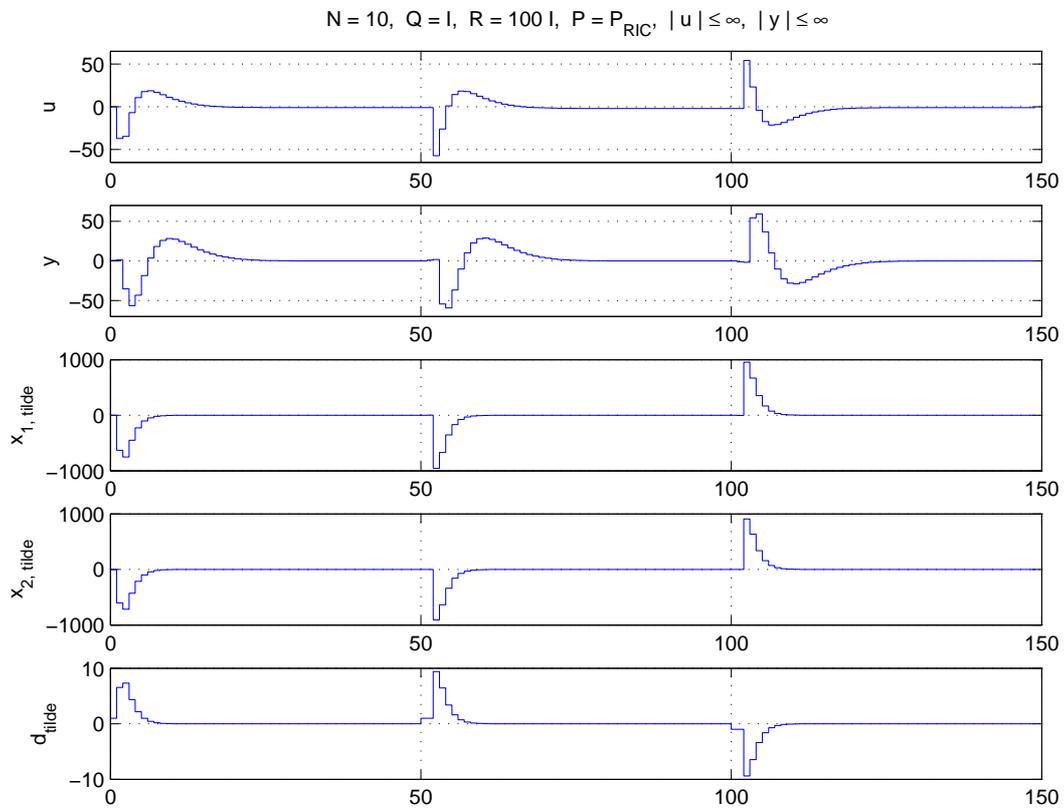


Figure 11: Resultados de simulación del Problema 2, Caso 1 (P_{RIC} se refiere a una matriz P elegida satisfaciendo (56), $x_{i,tilde}$ se refiere al error de estimación del estado i de la planta y d_{tilde} al error de estimación de la perturbación).

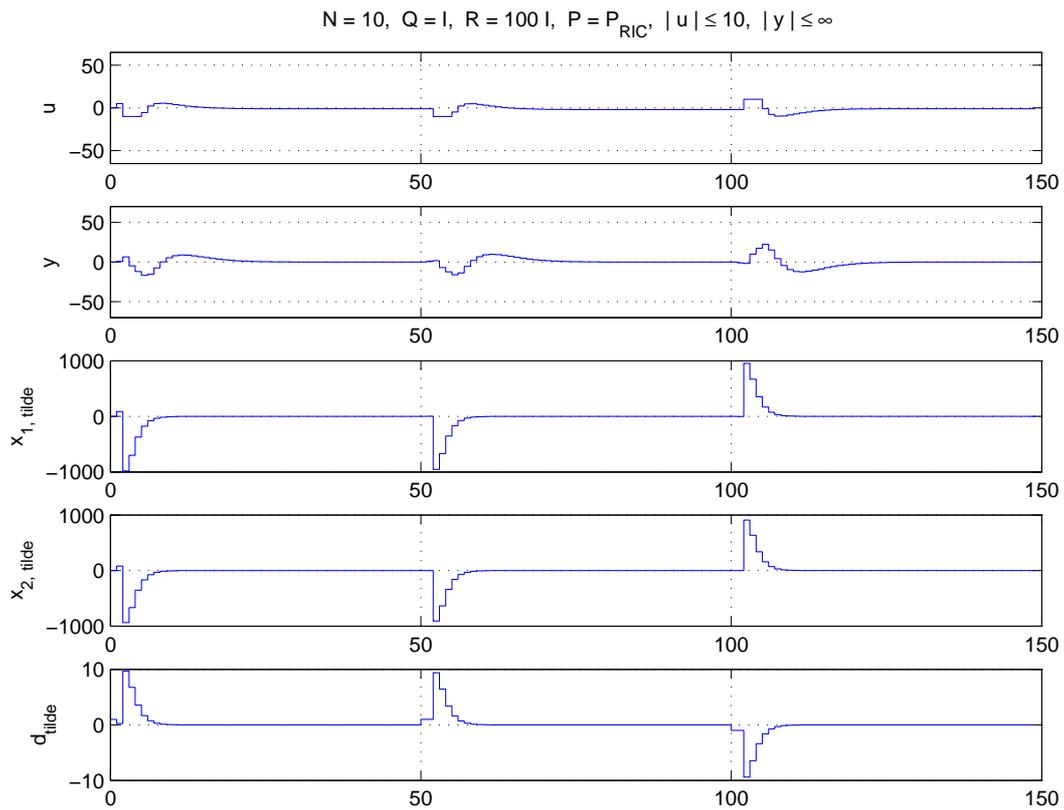


Figure 12: Resultados de simulación del Problema 2, Caso 2 (P_{RIC} se refiere a una matriz P elegida satisfaciendo (56), $x_{i,tilde}$ se refiere al error de estimación del estado i de la planta y d_{tilde} al error de estimación de la perturbación).

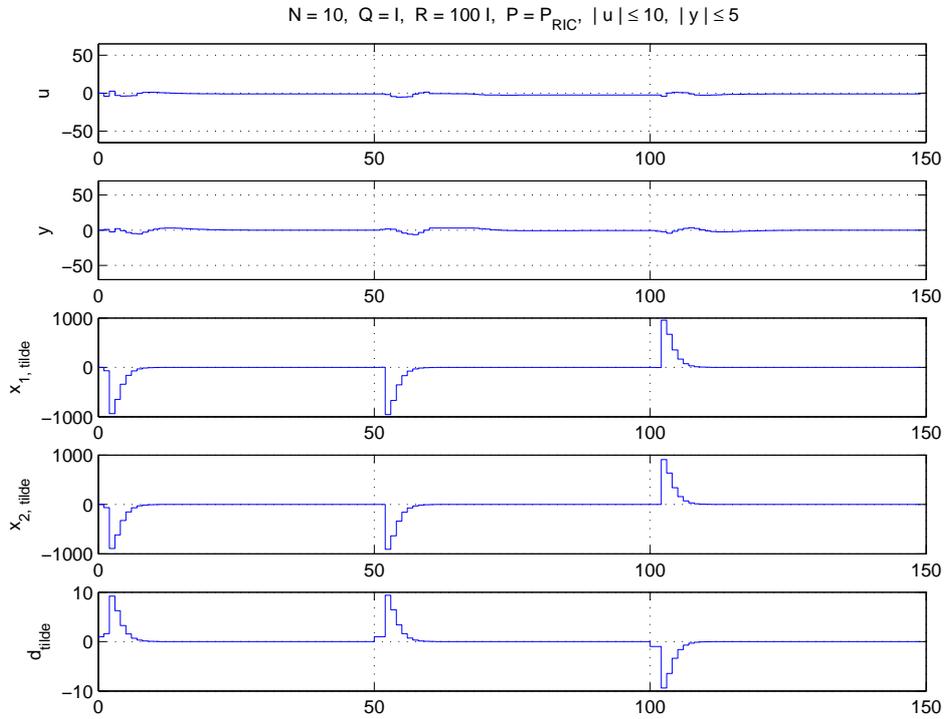


Figure 13: Resultados de simulación del Problema 2, Caso 3 (P_{RIC} se refiere a una matriz P elegida satisfaciendo (56), $x_{i,tilde}$ se refiere al error de estimación del estado i de la planta y d_{tilde} al error de estimación de la perturbación).

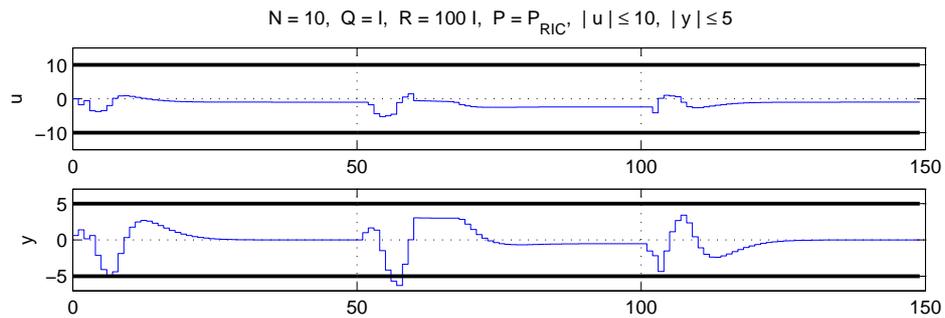


Figure 14: Detalle de los resultados de simulación del Problema 2, Caso 3 (P_{RIC} se refiere a una matriz P elegida satisfaciendo (56), $x_{i,tilde}$ se refiere al error de estimación del estado i de la planta y d_{tilde} al error de estimación de la perturbación).

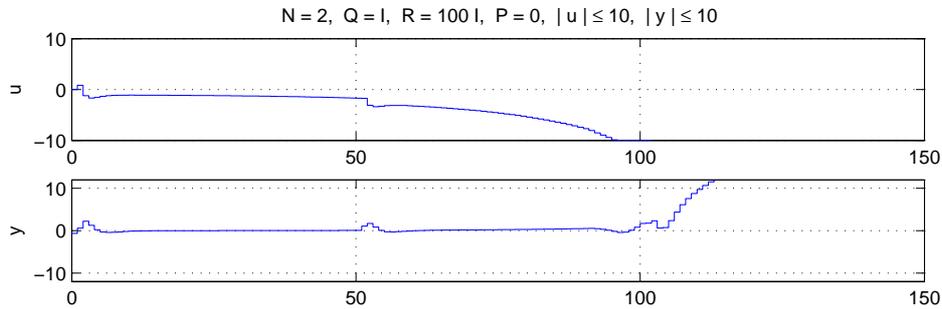


Figure 15: Resultados de simulación del Problema 2, Caso 4.

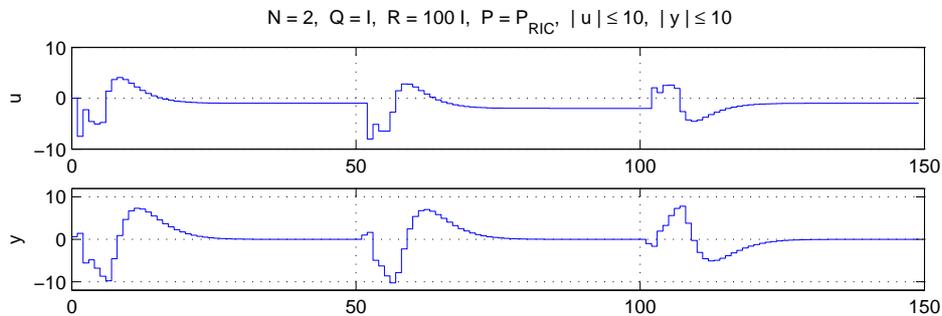


Figure 16: Resultados de simulación del Problema 2, Caso 5.

References

- [1] J. Chen, S. Hara, and G. Chen. Best tracking and regulation performance under control effort constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8):1320–1380, August 2003.
- [2] B. Francis. *A Course on H_∞ Control Theory*. Springer, 1987.
- [3] G. C. Goodwin, M. M. Serón, and J. A. De Doná. *Constrained Control & Estimation – An Optimization Approach*. Springer-Verlag, London, 2005.
- [4] D.Q. Mayne, J.B. Rawling, C.V. Rao, and P.O.M. Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36:789–814, 2000.
- [5] M. Morari and E. Zafiriou. *Robust process control*. Prentice Hall, 1989.
- [6] S.J. Qin and T.A. Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 11(7):733–764, 2003.
- [7] M.E. Salgado and E.I. Silva. Robustness issues in \mathcal{H}_2 optimal control of unstable plants. *Systems & Control Letters*, 55(2):124 – 131, February 2006.

- [8] M.M. Seron, J.H. Braslavsky, and G.C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer, London, 1997.
- [9] M. Vidyasagar. *Control Systems Synthesis: A Factorization Approach*. MIT Press, Cambridge, USA, 1985.
- [10] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, 1996.