Primera Tarea IPD-431

24 de Marzo de 2011

1. Generalidades

- La tarea es de carácter *individual*.
- El formato es libre.
- *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario).
- La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
- Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
- Referencias sugeridas: [2, Capítulos 1,2,5], [1, Capítulo7, Sección 3].
- **Fecha de entrega (límite):** 07 de Abril de 2011, 9:30hrs.

2. Cuestionario

Problema 1

Considere un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P_r)$. Suponga que $B_1, \ldots, B_n$ son eventos (i.e., miembros de $\mathcal{F}$) tales que $B_i \cap B_j = \phi$ si $i \neq j$ y $\cup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Pruebe que:

1. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$P_r\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P_r\{A|B_i\} P_r\{B_i\}, \tag{1}$$

   donde $P_r\{A|B_i\} \triangleq P_r\{A, B_i\} P_r\{B_i\}^{-1}$.

2. Si X es una variable aleatoria continua definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P_r)$, entonces

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|B=B_i}(x) P_r\{B_i\}. \tag{2}$$

3. Si (X, Y, Z) son variables aleatorias continuas definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P_r)$, entonces

$$f_{X|Z=z}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|(Y,Z)=(y,z)}(x) f_{Y|Z=z}(y) dy. \tag{3}$$

Problema 2

Considere variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ conjuntamente distribuidas con distribuciones marginales $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$. Defina

$$f_X \triangleq \sum_{i=1}^{n} p_i f_{X_i}, \tag{4}$$

donde $p_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

1. Pruebe que f_X califica como función de densidad de probabilidad.

2. Suponga que la variable aleatoria X posee la densidad f_X definida en el punto anterior. Demuestre que

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_{X_i}, \quad P_X = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[P_{X_i} + (\mu_{X_i} - \mu_X)(\mu_{X_i} - \mu_X)^T \right], \tag{5}$$

   donde μ_{X_i} y P_{X_i} corresponden a la media y a la varianza de la variable aleatoria X_i, respectivamente.

3. Considere la situación del punto anterior. Suponga que $n = 2$ y que (X_1, X_2) son conjuntamente Gaussianas. Suponga que f_X ha de aproximarse usando sólo una densidad Gaussiana con media y varianza iguales a la media y varianza de X. Evalúe dicha aproximación vía simulaciones considerando distintos conjuntos de parámetros para f_{X_1} y f_{X_2}.

Problema 3 (Ejercicio 2.3 en [2])

Suponga que X_1 y X_2 son variables aleatorias conjuntamente Gaussianas, con densidad

$$f_{X_1 X_2} = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2\rho \\ 2\rho & 4 \end{bmatrix} \right). \tag{6}$$

1. Calcule las densidades marginales de X_1 y X_2.

2. Calcule la densidad de probabilidad condicional de X_2, dado X_1.

3. ¿Para qué valores de ρ se tiene una matriz de covarianza (conjunta) positiva definida?

4. Grafique algunas curvas de nivel de $f_{X_1 X_2}$. Muestre gráficamente que, si $\rho \approx -1$, entonces $x_2 \approx 4 - 2x_1$. ¿Cómo se comparan sus conclusiones con la respuesta dada en 2.?

Problema 4

Suponga que los vectores aleatorios X e Y se hallan conjuntamente distribuidos. El mejor estimador en sentido cuadrático medio de X, dada una medición de Y, está dado por $\mathcal{E}\{X|Y\}$. Denote dicho estimador por $\hat{X}|_Y$.

1. Suponga que X e Y son conjuntamente Gaussianos y que la matriz de varianza conjunta correspondiente es no singular.

   a) Demuestre que la varianza del error óptimo de estimación $\tilde{X}|_Y \triangleq X - \hat{X}|_Y$ está dada por

   $$P_{\tilde{X}|_Y} = P_X - P_{XY} P_Y^{-1} P_{YX}, \tag{7}$$

   y que $P_{\tilde{X}|_Y} \geq 0$.

   b) Pruebe $P_{\tilde{X}|_Y} \leq P_X$ y provea una interpretación de este hecho. (Ayuda: ¿Cuál es la incertidumbre sobre X antes y después de la medición de Y?)

2. Calcular esperanzas condicionales en el caso de vectores aleatorios arbitrariamente distribuidos es complicado. Por lo tanto, muchas veces se renuncia a calcular $\hat{X}|_Y$ y se considera el mejor estimador *lineal* en sentido cuadrático medio de X, dada una medición de Y (*best linear least squares estimator*). Un estimador lineal de X en base a mediciones de Y está dado por

$$\hat{X} = AY + b, \tag{8}$$

   donde A es una matriz de dimensiones apropiadas y b es un vector de dimensiones apropiadas.

a) Suponga que X e Y son variables aleatorias conjuntamente distribuidas y de segundo orden. Pruebe que, si $P_Y > 0$, entonces el mejor estimador lineal en sentido cuadrático medio de X, dada una medición de Y, digamos $\hat{X}|_Y^L$, está dado por

$$\hat{X}|_Y^L = \mu_X + P_{XY}P_Y^{-1}(Y - \mu_Y). \tag{9}$$

b) En las condiciones anteriores, pruebe que el costo óptimo, i.e., la varianza del error óptimo de estimación $\tilde{X}|_Y^L \triangleq X - \hat{X}|_Y^L$, está dada por

$$P_{\tilde{X}|_Y^L} = P_X - P_{XY}P_Y^{-1}P_{YX}. \tag{10}$$

c) Discuta la relación entre los resultados de los puntos anteriores y el caso Gaussiano considerado en la Parte 1.

d) Pruebe que, en las condiciones de la parte *a*), $\mu_{\tilde{X}|_Y^L} = 0$ y $P_{\tilde{X}|_Y^L, Y} = 0$. (Note que aquí se ha abusado de la notación y se considera que $P_{XY} = P_{X,Y}$.) Interprete el resultado anterior.

e) Considere tres variables aleatorias X, U y V conjuntamente distribuidas. Demuestre que si U y V no están correlacionadas y $P_U > 0$, $P_V > 0$, entonces

$$\hat{X}|_{U,V}^L = \hat{X}|_U^L + \hat{X}|_V^L - \mu_X. \tag{11}$$

Interprete el resultado.

Referencias

[1] K.J. Åström. *Introduction to Stochastic Control Theory.* Academic Press, New York, 1970.

[2] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems.* Springer, second edition, 2002.