Segunda Tarea IPD-431

28 de abril de 2011

1. Generalidades

- La tarea es de carácter *individual*.
- El formato es libre.
- *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario).
- La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
- Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
- Referencias sugeridas: [6, Capítulos 3,4], [1, Capítulos 2,4].
- **Fecha de entrega (límite):** 12 de Mayo de 2011, 9:30hrs.

2. Cuestionario

Problema 1 (15 ptos.)

Considere el sistema lineal

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

$$y(k) = Cx(k), \tag{2}$$

donde x_o es una variable aleatoria de segundo orden con media cero y varianza identidad, y u es un proceso estacionario en sentido amplio, no correlacionado con x_o, de media cero y densidad espectral de potencia

$$S_u(e^{j\omega}) = \left| \frac{1}{(e^{j\omega} - 3)(e^{j\omega} - 1/2)} \right|^2. \tag{3}$$

1. Elija valores numéricos para las matrices (A, B, C) que garanticen que el sistema sea estable en sentido cuadrático medio. Para los valores elegidos, calcule la media, varianza, y función de covarianza de x e y para todo instante (no negativo). Calcule, además, los valores estacionarios correspondientes y el espectro estacionario de x e y.
2. Simule la situación anterior y verifique los resultados que obtuvo en régimen estacionario. Para ello, estime la media, varianza y función de covarianza estacionaria de x e y usando realizaciones simuladas (use los comandos `mean, var` y `xcorr` en Matlab). Comente.

Problema 2 (40 ptos.)

En este problema se analizará un cuantizador con realimentación (*feedback quantizer*) sencillo. Estos dispositivos se usan en sistemas de procesamiento digital de señales, incluyendo sistemas de compresión y reproducción de audio y video [5]. Dos ventajas de este tipo de cuantizadores, por sobre quantizadores estándar (i.e., sin realimentación), son: (1) permiten lograr un error neto menor para una misma tasa de compresión; (2) permiten elegir la banda de frecuencias en que los errores de cuantización serán significativos [2].

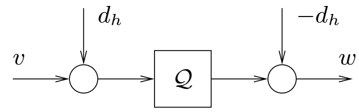

Figura 1: Cuantizador con *dither* substractivo.

Un quantizador uniforme es un dispositivo con entrada $\bar{v}$ y salida $\bar{w}$ tal que

$$\bar{w}(k) = \mathcal{Q}(\bar{v}(k)) \triangleq \left\lfloor \frac{\bar{v}(k)}{\Delta} \right\rfloor \Delta, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \tag{4}$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ corresponde a la parte entera de $(\cdot)$, y Δ al paso de cuantización. El error de cuantización se define como $\bar{q} \triangleq \bar{w} - \bar{v}$ y depende determinísticamente de la entrada $\bar{v}$. Esta dependencia es difícil de caracterizar lo que dificulta el análisis de sistemas que incluyen cuantizadores. Un modelo usual propone aproximar $\bar{q}$ por un proceso de ruido blanco (o i.i.d.), no correlacionado con (o independiente de) la entrada $\bar{v}$ [4]. Este modelo es aproximado, pero razonable bajo algunos supuestos.

1. En esta pregunta consideraremos una situación en que el modelo de ruido blanco es exacto. Considere el esquema de cuantización de la Figura 1, donde

$$w(k) = \mathcal{Q}(v(k) + d_h(k)) - d_h(k), \tag{5}$$

y d_h es una secuencia i.i.d., uniformemente distribuida en $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$ e independiente de v. La señal d_h se conoce como *dither*. A continuación Ud. probará que

$$q \triangleq w - v \tag{6}$$

es una secuencia i.i.d., uniformemente distribuida en $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$ e independiente de v.

a) Pruebe que $\mathcal{E}\left\{I_A(x)\right\} = \mathcal{P}\left\{x \in A\right\}$, donde

$$I_A(x) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A, \end{cases} \tag{7}$$

corresponde a la función indicatriz del conjunto A.

b) Pruebe que la función $\mathcal{Q}(\cdot) - (\cdot)$ es periódica con período Δ.

c) Pruebe que $\bar{I}_\alpha(x) \triangleq I_{\{x \in \mathbb{R}: x \leq \alpha\}}(\mathcal{Q}(x) - x)$ es periódica con periodo Δ.

d) Pruebe que $q(k)$ es independiente de (q^{k-1}, v), donde $q^{k-1} \triangleq q(k-1), q(k-2), \ldots$. Para ello, justifique cada paso en el desarrollo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left\{q(k) \leq \alpha | q^{k-1}, v\right\} &= \mathcal{P}\left\{\mathcal{Q}(v(k) + d_h(k)) - (v(k) + d_h(k)) \leq \alpha | q^{k-1}, v\right\} && (8)\\ &= \mathcal{E}\left\{\bar{I}_\alpha(v(k) + d_h(k)) | q^{k-1}, v\right\} && (9)\\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} I_\alpha(v(k) + u) du && (10)\\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} I_\alpha(u) du && (11)\\ &= \kappa, && (12) \end{aligned}$$

donde κ depende sólo de los parámetros del quantizador y no de (q^{k-1}, v). Concluya, entonces, que q es i.i.d. e independiente de v.

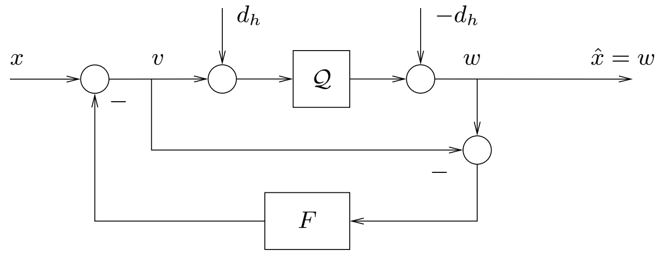

Figura 2: Cuantizador realimentado elemental.

e) Pruebe que $q(k)$ distribuye en forma uniforme en $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$. Pare ello, justifique cada paso en el desarrollo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left\{q(i) \leq \alpha\right\} &= \mathcal{P}\left\{\mathcal{Q}(v(i) + d_h(i)) - (v(i) + d_h(i)) \leq \alpha\right\} \\ &= \mathcal{P}\left\{\mathcal{Q}(d_h(i)) - d_h(i) \leq \alpha\right\} \\ &= \mathcal{P}\left\{-d_h(i) \leq \alpha\right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

2. Considere el cuantizador con realimentación de la Figura 2. En dicha figura, F es un sistema lineal e invariante en el tiempo, estable, estrictamente propio, y con estado inicial determinístico, x es un proceso estacionario en sentido amplio, con media cero y densidad espectral de potencia S_x, $\mathcal{Q}$ corresponde a un quantizador uniforme, y d_h es una secuencia i.i.d., uniformemente distribuida en $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$ e independiente de x.

a) Concluya, utilizando el argumento de la parte anterior, que el ruido equivalente $q \triangleq w - v$ es i.i.d., uniformemente distribuido en $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$ e independiente de x. (Bastan un par de indicaciones clave.)

b) Calcule la densidad espectral de potencia y la varianza del error de reconstrucción

$$\tilde{x} \triangleq P(x - \hat{x}), \tag{14}$$

donde P es un filtro propio y estable que modela el que la calidad percibida de la aproximación $\hat{x}$ es, usualmente, una función de la frecuencia. (Por ejemplo, si x es una señal de audio, entonces P podría corresponder a un modelo de la respuesta en frecuencia del oído.)

c) Suponga que tanto P como x son pasabajos (i.e., S_x es sólo relevante en bajas frecuencias) ¿Cómo elegiría Ud. el filtro F? (La elección óptima de F se abordará en la Tarea 4.)

d) Ilustre su respuesta a la pregunta anterior mediante simulaciones que consideren un ejemplo sencillo. Verifique, mediante simulaciones y realizando un cálculo directo, que la elección $F = 0$ no es óptima desde el punto de vista de la varianza estacionaria del error de reconstrucción $\tilde{x}$. En sus simulaciones, ¿qué pasa si elimina la señal de *dither* d_h?

Problema 3 (45 ptos.)

En este problema estudiará una clase sencilla de sistema lineales con saltos Markovianos [3]. Estos sistemas sirven como modelo de situaciones que involucran conmutaciones no determinísticas como, por ejemplo, sistemas de procesamiento de señales o control sujetos a la pérdida de datos.

1. Considere la situación de la Figura 3(a), donde el sistema S es tal que

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{15}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \tag{16}$$

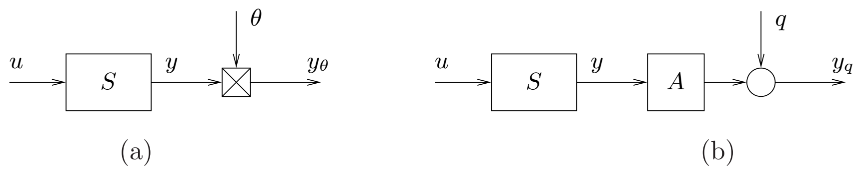

Figura 3: (a) Sistema en que la medición de la salida es intermitente y (b) situación auxiliar en que la pérdida de datos se ha reemplazado por una ganancia y una fuente de ruido.

y es escalar,

$$y_\theta(k) = \theta(k)y(k), \tag{17}$$

y θ es una secuencia i.i.d. tal que $\theta(k) \in \{0, 1\}$ y $\mathcal{P}\{\theta(k) = 1\} = p$. Suponga que x_o es una variable aleatoria de segundo orden, y que u es ruido blanco de segundo orden con media cero y varianza constante, no correlacionado con x_o. Suponga, además, que θ es independiente de (x_o, u).

a) Calcule expresiones recursivas que permitan calcular la media, varianza y función de covarianza de y_θ en todo instante. ¿Bajo qué condiciones es el proceso y_θ asintóticamente estacionario en sentido amplio? Calcule la media y varianza estacionaria de y_θ en dicho caso.

b) Considere la situación auxiliar de la Figura 3(b), donde S tiene la descripción dada anteriormente,

$$y_q(k) = q(k) + Ay(k), \tag{18}$$

A es una constante, y q es ruido blanco de media cero, no correlacionado con (x_o, u). ¿Para qué elección de A y $P_q(k)$ se tiene que las medias, varianzas y funciones de covarianza de y_θ e y_q coinciden para todo instante?

2. Considere el sistema realimentado de la Figura 4(a), donde N_θ es tal que

$$x_\theta(k+1) = Ax_\theta(k) + B_d d(k) + B_w w_\theta(k), \quad x_\theta(0) = x_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{19}$$
$$e_\theta(k) = C_e x(k) + D_{de} d(k) + D_{we} w_\theta(k), \tag{20}$$
$$v_\theta(k) = C_v x(k) + D_{dv} d(k), \tag{21}$$

v_θ es escalar,

$$w_\theta(k) = \theta(k)v_\theta(k), \tag{22}$$

y θ es como en la parte anterior. Suponga que x_o es una variable aleatoria de segundo orden, y que d es ruido blanco de segundo orden con media cero y varianza constante, no correlacionado con x_o. Suponga, además, que θ es independiente de (x_o, d).

a) Determine una ecuación recursiva para la media,varianza y función de covarianza de x_θ y de e_θ. (**Ayuda:** Considere la primera pregunta del Problema 3 de la tercera tarea de la versión anteriro del ramo.)

b) Establezca condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de la media y varianza de x_θ.

c) Considere la situación auxiliar de la Figura 4(b), donde N_q es tal que

$$x_q(k+1) = Ax_q(k) + B_d d(k) + B_w w_q(k), \quad x_q(0) = x_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{23}$$
$$e_q(k) = C_e x(k) + D_{de} d(k) + D_{we} w_q(k), \tag{24}$$
$$v_q(k) = C_v x(k) + D_{dv} d(k), \tag{25}$$

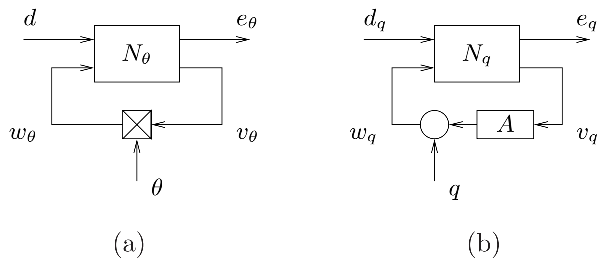

Figura 4: (a) Sistema realimentado a través de un canal imperfecto que pierde datos con probabilidad $1 - p$ y (b) situación auxiliar en que la pérdida de datos se ha reemplazado por una ganancia y una fuente de ruido.

v_q es escalar,

$$w_q(k) = q(k) + Av_q(k), \tag{26}$$

A es una constante, y q es ruido blanco de media cero. Suponga que (x_o, d) son como en la parte anterior y que q no está correlacionado con (x_o, d). ¿Para qué elección de A y $P_q(k)$ se tiene que las medias, varianzas y funciones de covarianza de x_θ e x_q coinciden para todo instante?

Referencias

[1] K.J. Åström. *Introduction to Stochastic Control Theory.* Academic Press, New York, 1970.

[2] P. M. Aziz, H. V. Sorensen, and J. Van der Spiegel. An overview of Sigma-Delta converters. *IEEE Signal Processing Magazine*, 13(1):61–84, January 1996.

[3] O.L.V. Costa, M.D. Fragoso, and R.P. Marques. *Discrete Time Markov Jump Linear Systems.* Springer, 2005.

[4] R.M. Gray and D.L. Neuhoff. Quantization. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(6):2325–2383, 1998.

[5] R. Schreier and G.C. Temes. *Understanding Delta Sigma Data Converters.* Wiley-IEEE Press, 2004.

[6] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems.* Springer, second edition, 2002.