

---

# Tercera Tarea IPD-431

24 de mayo de 2011

---

## 1. Generalidades

- La tarea es de carácter *individual*.
- El formato es libre.
- *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario).
- La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
- Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
- Referencias sugeridas: [2], [1], [3]
- **Fecha de entrega (límite):** 9 de Junio de 2011, 9:30hrs.

## 2. Cuestionario

### Problema 1

Considere el resultado siguiente:

**Theorem 1** *Considere un vector aleatorio de segundo orden  $Y \sim N(X\theta, \sigma^2 I)$ , donde  $\theta$  es un vector de parámetros determinísticos, pero desconocidos,  $X$  es una matriz determinística y conocida de dimensiones apropiadas, y  $\sigma^2$  es un escalar determinístico y desconocido. Si  $X^T X$  es no singular, entonces:*

- *El estimador*

$$\hat{\theta} \triangleq (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (1)$$

*corresponde a un estimador insesgado y de mínima varianza para  $\theta$  basado en una medición del vector  $Y$ .*

- $\hat{\theta} \sim N(\theta, (X^T X)^{-1} \sigma^2)$ .
- *El vector de residuos  $R \triangleq Y - X\hat{\theta}$  distribuye en forma normal y es independiente de  $\hat{\theta}$ .* ■

1. Pruebe la primera afirmación del Teorema 1. Para ello, siga los siguientes pasos:

a) Defina  $\beta \triangleq [\theta^T \ \sigma^2]^T$  y verifique que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_Y(Y; \beta) = \frac{1}{\sigma^2} (Y - X\theta)^T X \triangleq V_1^T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln f_Y(Y; \beta) = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) \triangleq V_2, \quad (3)$$

donde  $V_1$  es un vector (columna) y  $V_2$  es un escalar (ambos aleatorios).

b) Pruebe que

$$\mathcal{E} \{V_1 V_2\} = 0, \quad \mathcal{E} \{V_1 V_1^T\} = \frac{1}{\sigma^2} X^T X. \quad (4)$$

- c) Calcule la matriz de información de Fisher  $M_\beta$ .
  - d) Verifique que  $P_{\hat{\theta}}$  es igual a la cota inferior de Cramer-Rao correspondiente.
2. Pruebe la segunda afirmación del Teorema 1.
  3. Pruebe la tercera afirmación del Teorema 1. Calcule, además, expresiones lo más compactas posibles para la media y la varianza de los residuos  $R$ .

### Problema 2

Suponga que un sistema lineal e invariante en el tiempo, con entrada escalar  $u$  y salida escalar  $y$ , puede ser descrito usando la ecuación recursiva

$$y(k) = \sum_{i=0}^n \alpha_i u(k-i) + e(k), \quad (5)$$

donde  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  son constantes reales y  $\{e(k); k \in \mathbb{N}_0\}$  corresponde a una secuencia de variables aleatorias i.i.d. y de media cero. Suponga que tanto  $y$  como  $u$  pueden medirse en forma perfecta, y que la señal  $u$  es determinística y tal que  $u(k) = 0, \forall k < 0$ .

1. Muestre cómo usar la metodología de cuadrados mínimos estudiada en clase para obtener un estimador lineal insesgado y de varianza mínima para el vector de parámetros  $\alpha \triangleq [\alpha_0 \dots \alpha_N]^T$ , usando las mediciones  $y(0), \dots, y(N)$  y  $u(0), \dots, u(N)$ , con  $N \gg n$ .
2. Ilustre su respuesta a la pregunta anterior usando Matlab y considerando un sistema de segundo orden. (Use como entrada  $u$  las realizaciones de una secuencia de variables aleatorias Gaussianas, i.i.d., con media nula y varianza unitaria.)
3. Use simulaciones para verificar que el estimador de cuadrados mínimos de  $\alpha$  es insesgado y consistente.

### Problema 3

Considere una variable aleatoria escalar  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Suponga que tanto  $\mu$  como  $\sigma^2$  son parámetros desconocidos.

1. Proponga un estimador insesgado para  $\mu$ .
2. Proponga intervalos de confianza del  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\mu$ .
3. Proponga un test de significancia  $\alpha$  para la *testear* la hipótesis nula  $H_0 : \mu = \mu_0$  utilizando como hipótesis alternativa  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .
4. Ilustre cada uno de los puntos anteriores utilizando Matlab. (En particular, ilustre en forma experimental el que el estimador para  $\mu$  es insesgado, el significado del intervalo de confianza de la segunda parte, y la significancia del test que proponga en la tercera parte.)

## Referencias

- [1] G.C. Goodwin and R.L. Payne. *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*. Academic Press, New York, 1977.
- [2] P.L. Meyer. *Introductory Probability and Statistical Applications*. Addison Wesley, 2nd edition, 1970.
- [3] S.D. Silvey. *Statistical inference*. Chapman & Hall/CRC, 1975.