Cuarta Tarea IPD-431

16 de junio de 2011

1. Generalidades

- La tarea es de carácter *individual*.
- El formato es libre.
- *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario).
- La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
- Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
- Referencias sugeridas: [3, Sección 9.4], [1, Sección 11.6], [2]
- **Fecha de entrega (límite):** 01 de julio, 12:00 PM.

2. Cuestionario

Problema 1

Considere un sistema lineal S descrito a través de las ecuaciones

$$x(k+1) = Ax(k) + v(k), \quad x(0) = x_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

$$y(k) = Cx(k) + e(k), \tag{2}$$

donde x es el estado, y es la salida de un sensor, x_o es una variable aleatoria de segundo orden, v y e son secuencias de ruido blanco de media cero y varianza constante, no correlacionadas entre sí, y no correlacionadas con x_o. Suponga que la varianza de e es positiva definida. Suponga que y es escalar y que A es una matriz estable.

El sistema anterior se observa a través de un canal de comunicación cuya salida, denotada por y_θ, obedece a la relación

$$y_\theta(k) = \theta(k)y(k), \tag{3}$$

donde θ es una secuencia i.i.d., independiente de (x_o, v, e), tal que $\theta(k) \in \{0,1\}$, $\text{Prob}\{\theta(k) = 1\} = p \in (0,1)$.

En el contexto anterior debe diseñarse un filtro H lineal, invariante en el tiempo y estrictamente causal, que al ser excitado por y_θ entregue estimaciones estacionarias óptimas (en sentido cuadrático medio) del estado del sistema S. La situación anterior se describe gráficamente en la Figura 1.

1. Establezca condiciones sobre el filtro H que garanticen la estabilidad en sentido cuadrático medio del sistema de la Figura 1.
2. Establezca una expresión, lo más compacta posible, para el filtro H óptimo, i.e., para el filtro

   $$H_{\text{opt}} \triangleq \arg\inf_{H \in \mathcal{S}} \ \text{trace}\left\{P_{\tilde{x}}\right\}, \tag{4}$$

   donde $\mathcal{S}$ corresponde al conjunto de todas las funciones de transferencia estrictamente causales que satisfacen las condiciones establecidas en la parte anterior, y $P_{\tilde{x}}$ corresponde a la matriz de varianza estacionaria del error de estimación $\tilde{x} \triangleq x - \hat{x}$, donde $\hat{x}$ corresponde a la salida de H.

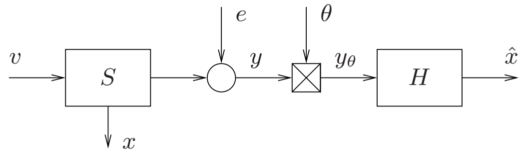

Figura 1: Esquema de estimación de estado considerado en el Problema 1.

3. Compare, vía simulaciones y en forma analítica, el desempeño que alcanza el filtro H_{opt} con aquél alcanzado por un filtro de Kalman estacionario que ha sido sintonizado suponiendo que $y_\theta = y$ (i.e., suponiendo que no hay pérdida de datos en el canal) y que, sin embargo, se alimenta con y_θ en vez de y.

Problema 2

Considere N sistemas lineales descritos por las ecuaciones

$$x_j(k+1) = A_j x_j(k) + v_j(k), \quad x_j(0) = x_{j,o}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{5}$$

donde x_j denota al estado del sistema j-ésimo, v_j al ruido de proceso del sistema j-ésimo y A_j es, para cada j, una matriz constante de dimensiones apropiadas.[1] Para cada j, $x_{j,o}$ es una variable aleatoria de segundo orden, y v_j es un proceso blanco de segundo orden, con media cero y varianza constante P_{v_j}, no correlacionado con $x_{j,o}$.

Suponga que se cuenta con N sensores para medir los estados de cada uno de los sistemas descritos anteriormente. Las salidas de dichos sensores obedecen a las relaciones

$$y_j(k) = C_j x_j(k) + e_j(k), \quad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{6}$$

donde e_j corresponde al ruido de medición asociado al j-ésimo sensor y C_j es, para cada j, una matriz constante de dimensiones apropiadas. Para cada j, e_j es un proceso blanco, de media cero y varianza constante $P_{e_j} > 0$, no correlacionado con v_j ni $x_{j,o}$.

Suponga que todas las variables aleatorias y procesos introducidos anteriormente son conjuntamente Gaussianos. Suponga, además, que se tiene acceso a la salida del ℓ-ésimo sensor, i.e., a y^ℓ, donde $\ell \in \{1, \ldots, N\}$ es constante en el tiempo, pero de valor desconocido.

1. Proponga un estimador óptimo para $x_\ell(k)$, dadas las mediciones $y_\ell(0), \ldots, y_\ell(k)$. (Note que lo anterior implica contar con un medio de "identificar" el valor de ℓ.)

2. Use simulaciones para ilustrar el comportamiento del estimador propuesto (suponga $N = 2$).

Referencias

[1] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T Kirubarajan. *Estimation with applications to tracking and navigation.* Wiley Online Library, 2001.

[2] E.I. Silva and S.A. Pulgar. LTI control systems design over unreliable channels. *To appear in Automatica (available online)*, 2011.

[3] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems.* Springer, second edition, 2002.

[1] Note que la dimensión de x^i no es necesariamente igual a la de x_j (cuando $i \neq j$).