Primera Tarea IPD-431 (CORREGIDA)

15 de Abril de 2010

La primera versión de la Tarea 1 contenía algunos errores menores. Las correcciones se detallan más abajo en rojo. Note la nueva fecha de entrega.

1. Generalidades

- La tarea es de carácter *individual*.
- El formato es libre.
- *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario).
- La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
- Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
- Referencias sugeridas: [2, Capítulo1], [3, Capítulos 1,2,5], [1, Capítulo7, Sección 3].
- **Fecha de entrega (límite):** 30 de Abril de 2010, 17:00 hrs.

2. Cuestionario

Problema 1

1. Suponga que X e Y son vectores aleatorios tales que $Y = g(X)$, donde g es una función continuamente diferenciable[1] tal que su función inversa g^{-1} existe y es también continuamente diferenciable. Pruebe que

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|\det\left(J_g(g^{-1}(y))\right)\right|^{-1}, \qquad (1)$$

   donde J_g corresponde a la matriz Jacobiana de la función g.

2. Considere dos vectores aleatorios X_1 y X_2 de las mismas dimensiones. Defina $Y_1 \triangleq X_1 + X_2$. Suponga que interesa calcular la función de densidad de probabilidad (pdf) de Y_1 en base a la pdf conjunta de X_1 y X_2.

   a) Muestre que el resultado de la parte anterior no puede utilizarse directamente para calcular dicha pdf.

   b) Defina una nueva variable aleatoria $Y_2 = X_2$ y use el resultado de la Parte 1 para calcular la pdf conjunta de Y_1 e Y_2 en base a la pdf conjunta de X_1 y X_2.

[1] i.e., g es una función derivable, y su primera derivada es continua.

c) Use el resultado anterior para demostrar que la pdf de Y_1 está dada por

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1,X_2}(y_1 - y_2, y_2) dy_2. \tag{2}$$

d) Demuestre que si X_1 y X_2 son independientes, entonces la pdf de Y_1 puede expresarse como la convolución de las pdfs marginales de X_1 y X_2.

e) Verifique el resultado de la parte anterior usando las propiedades de la función característica.

Problema 2

Dados dos vectores aleatorios X e Y conjuntamente distribuidos, defina

$$P_{X|Y} \triangleq \mathcal{E}\left\{(X - \mathcal{E}\{X|Y\})(X - \mathcal{E}\{X|Y\})^T |Y\right\}. \tag{3}$$

Pruebe que

$$P_X = \mathcal{E}\left\{P_{X|Y}\right\} + P_{\mathcal{E}\{X|Y\}}. \tag{4}$$

¿Cuál es el sentido (interpretación) de cada uno de los términos en la expresión anterior?

Problema 3

Suponga que los vectores aleatorios X e Y se hallan conjuntamente distribuidos. Según se discutió en clase, el mejor estimador en sentido cuadrático medio de X, dada una medición de Y, digamos $\hat{X}|_Y$, está dado por $\mathcal{E}\{X|Y\}$.

1. Si X e Y son conjuntamente Gaussianos y la matriz de varianza conjunta correspondiente es no singular, entonces (vea apuntes de clase)

$$\hat{X}|_Y = \mathcal{E}\{X|Y\} = \mu_X + P_{XY}P_Y^{-1}(Y - \mu_Y). \tag{5}$$

   a) Demuestre que la varianza del error óptimo de estimación $\tilde{X}|_Y \triangleq X - \hat{X}|_Y$ está dada por

$$P_{\tilde{X}|_Y} = P_X - P_{XY}P_Y^{-1}P_{YX}, \tag{6}$$

   y que $P_{\tilde{X}|_Y} \geq 0$.

   b) Pruebe $P_{\tilde{X}|_Y} \leq P_X$ y provea una interpretación de este hecho. (Ayuda: ¿Cuál es la incertidumbre sobre X antes y después de la medición de Y?)

2. Calcular esperanzas condicionales en el caso de vectores aleatorios arbitrariamente distribuidos es complicado. Por lo tanto, muchas veces se renuncia a calcular $\hat{X}|_Y$ y se considera el mejor estimador *lineal* en sentido cuadrático medio de X, dada una medición de Y (*best linear least squares estimator*). Un estimador lineal de X en base a mediciones de Y está dado por

$$\hat{X} = AY + b, \tag{7}$$

   donde A es una matriz de dimensiones apropiadas y b es un vector de dimensiones apropiadas. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema 1 *Suponga que X e Y son variables aleatorias conjuntamente distribuidas, y de segundo orden (conjuntamente). Si $P_Y > 0$, entonces el mejor estimador lineal en sentido cuadrático medio de X, dada una medición de Y, digamos $\hat{X}|_Y^L$, está dado por*

$$\hat{X}|_Y^L = \mu_X + P_{XY}P_Y^{-1}(Y - \mu_Y). \tag{8}$$

El costo óptimo, i.e., la varianza del error óptimo de estimación $\tilde{X}|_Y^L \triangleq X - \hat{X}|_Y^L$, está dada por

$$P_{\tilde{X}|_Y^L} = P_X - P_{XY}P_Y^{-1}P_{YX}. \tag{9}$$

■

a) Discuta la relación existente entre este resultado y el caso Gaussiano considerado en la Parte 1.

b) En las condiciones del teorema, ¿cuál es el mejor estimador lineal de X, cuando no existen mediciones de Y? ¿Cuál es la varianza del error de estimación óptimo en dicho caso?

c) Pruebe que, en las condiciones del teorema, $\mu_{\tilde{X}|_Y^L} = 0$ y $P_{\tilde{X}|_Y^L, Y} = 0$. (Note que aquí se ha abusado de la notación y se considera que $P_{XY} = P_{X,Y}$.) Interprete.

d) Considere tres variables aleatorias X, U y V conjuntamente distribuidas. Demuestre que si U y V no están correlacionadas y $P_U > 0$, $P_V > 0$, entonces

$$\hat{X}|_{U,V}^L = \hat{X}|_U^L + \hat{X}|_V^L - \mu_X. \tag{10}$$

Interprete.

Referencias

[1] K.J. Åström. *Introduction to Stochastic Control Theory.* Academic Press, New York, 1970.

[2] A.H. Jazwinski. *Stochastic Processes and filtering theory.* Academic Press, San Diego, California, 1970 (Dover re-print 2007).

[3] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems.* Springer, second edition, 2002.