Segunda Tarea IPD-431

11 de Mayo de 2010

1. Generalidades

- La tarea es de carácter *individual*.
- El formato es libre.
- *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario).
- La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
- Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
- Referencias sugeridas: [3, Cap. 9], [2, Cap. 13-15], [1, Cap. 13].
- **Fecha de entrega (límite):** 25 de Mayo de 2010, 24:00hrs.

2. Cuestionario

Problema 1

Considere el resultado siguiente:

Theorem 1 *Considere un vector aleatorio de segundo orden $Y \sim N(X\theta, \sigma^2 I)$, donde θ es un vector de parámetros determinísticos, pero desconocidos, X es una matriz determinística y conocida de dimensiones apropiadas, y σ^2 es un escalar determinístico y desconocido. Si $X^T X$ es no singular, entonces:*

- *El estimador*

$$\hat{\theta} \triangleq (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{1}$$

  corresponde a un estimador insesgado y de mínima varianza para θ basado en una medición del vector Y.
- $\hat{\theta} \sim N(\theta, (X^T X)^{-1} \sigma^2)$.
- *El vector de residuos $R \triangleq Y - X\hat{\theta}$ distribuye en forma normal y es independiente de $\hat{\theta}$.*

■

1. Pruebe la primera afirmación del Teorema 1. Para ello, siga los siguientes pasos:

(a) Defina $\beta \triangleq [\theta^T \ \sigma^2]^T$ y verifique que

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_Y(Y;\beta) = \frac{1}{\sigma^2}(Y - X\theta)^T X \triangleq V_1^T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} \ln f_Y(Y;\beta) = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(Y - X\theta)^T(Y - X\theta) \triangleq V_2, \tag{3}$$

donde V_1 es un vector (columna) y V_2 es un escalar (ambos aleatorios).

(b) Pruebe que

$$\mathcal{E}\{V_1 V_2\} = 0, \quad \mathcal{E}\left\{V_1 V_1^T\right\} = \frac{1}{\sigma^2} X^T X. \tag{4}$$

(c) Calcule la matriz de información de Fisher M_β.

(d) Verifique que $P_{\hat{\theta}}$ es igual a la cota inferior de Cramer-Rao correspondiente.

2. Pruebe la segunda afirmación del Teorema 1.

3. Pruebe la tercera afirmación del Teorema 1. Calcule, además, expresiones lo más compactas posibles para la media y la varianza de los residuos R.

Problema 2

Suponga que un sistema lineal e invariante en el tiempo, con entrada escalar u y salida escalar y, puede ser descrito usando la ecuación recursiva

$$y(k) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u(k - i) + e(k), \tag{5}$$

donde $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ son constantes reales y $\{e(k); k \in \mathbb{N}_0\}$ corresponde a una secuencia de variables aleatorias i.i.d. y de media cero. Suponga que tanto y como u pueden medirse en forma perfecta, y que la señal u es determinística y tal que $u(k) = 0$, $\forall k < 0$.

1. Muestre cómo usar la metodología de cuadrados mínimos estudiada en clase para obtener un estimador lineal insesgado y de varianza mínima para el vector de parámetros $\alpha \triangleq [\alpha_0 \cdots \alpha_N]^T$, usando las mediciones $y(0), \cdots, y(N)$ y $u(0), \cdots, u(N)$, con $N \gg n$.

2. Ilustre su respuesta a la pregunta anterior usando Matlab y considerando un sistema de primer o segundo orden. (Use como entrada u las realizaciones de una secuencia de variables aleatorias Gaussianas, i.i.d., con media nula y varianza unitaria.)

3. Use simulaciones para verificar que el estimador de cuadrados mínimos de α es insesgado y consistente. (Note que esta última propiedad no fue probada en clases.)

Problema 3

Considere una variable aleatoria escalar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

1. Suponga que se conoce σ^2.

(a) Proponga un estimador insesgado para μ.
(b) Proponga intervalos de confianza del $(1-\alpha) \times 100\%$ para μ.
(c) Proponga un test de significancia α para la *testear* la hipótesis nula $H_o : \mu = \mu_o$ utilizando como hipótesis alternativa $H_1 : \mu \neq \mu_o$.
(d) Ilustre cada uno de los puntos anteriores utilizando Matlab. (En particular, ilustre en forma experimental el que el estimador para μ es insesgado, el significado del intervalo de confianza de la segunda parte, y la significancia del test que proponga en la tercera parte.)

2. Repita lo anterior si no se conoce el valor de σ^2.

Problema 4

Una función $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un kernel si y sólo si, $\forall x \in \mathbb{R}$, $K(x) \geq 0$, $K(x) = K(-x)$ y, además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1. \tag{6}$$

Ejemplos de kernel son las funciones K_G y K_U definidas vía

$$K_G(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad K_U(x) \triangleq \begin{cases} 1/2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \tag{7}$$

Considere una muestra aleatoria $X_1, \cdots, X_n$ de la variable aleatoria escalar y continua X. Se propone estimar los valores de la densidad de probabilidad de X utilizando, para cada $x \in \mathbb{R}$, el estimador

$$\hat{f}_X^{(n,h)}(x) \triangleq \frac{1}{nh(n)} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h(n)}\right), \tag{8}$$

donde $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^n$ es una función arbitraria y K es un kernel. (Note que, en (8), x es un parámetro en $\mathbb{R}$, no es una variable aleatoria.)

1. Pruebe que la función $\hat{f}_X^{(n,h)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuyos valores se hallan dados por (8), califica como función de densidad de probabilidad.
2. Calcule $\mathcal{E}\{\hat{f}_X^{(n,h)}(x)\}$.
3. Establezca condiciones sobre K y h de modo que $\hat{f}_X^{(n,h)}(x)$ corresponda un estimador asintóticamente insesgado de $f_X(x)$. (Basta un argumento intuitivo, pero razonablemente preciso.)

References

[1] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer controlled systems. Theory and design.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., third edition, 1997.

[2] P.L. Meyer. *Introductory Probability and Statistical Applications.* Addison Wesley, 2nd edition, 1970.

[3] Athanasios Papoulis. *Probability, random variables and stochastic process.* McGraw Hill Book Company, New York, 3rd edition, 1991.