Tercera Tarea IPD-431

8 de Junio de 2010

1. Generalidades

- La tarea es de carácter *individual.*
- El formato es libre.
- *Justifique en forma cuidadosa* cada paso en sus desarrollos (use referencias si es necesario).
- La notación utilizada en los problemas es la misma utilizada en clases.
- Los enunciados se han escrito de buena fe. Si Ud. cree que hay errores, por favor hágalo notar enviando un e-mail a `eduardo.silva@usm.cl`
- Referencias sugeridas: [4, Cap. 3 y 4], [1, Cap. 2-4].
- **Fecha de entrega (límite):** 22 de Junio de 2010, 24:00hrs.

2. Cuestionario

Problema 1

1. Resuelva el Problema 3.1 en [4]. (Note que el Problema 4.19 en el mismo libro puede ayudarle a dar respuesta a la última pregunta.)
2. Considere las condiciones del Problema 3.1 en [4] y suponga, además, que u es ruido blanco no correlacionado con ε, de media cero y varianza unitaria. Obtenga una representación de innovaciones (en variables de estado) para y.

Problema 2

Resuelva el Problema 4.17 en [4].

Problema 3

Considere el sistema dinámico siguiente:

$$X(k+1) = A(\theta(k))X(k) + B(\theta(k))U(k), \quad X(0) = X_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

donde:

- X_o es un vector aleatorio de segundo orden, media cero y matriz de varianza $P_o \geq 0$
- U es un proceso de ruido blanco de segundo orden, media cero y varianza constante $P_U \geq 0$, no correlacionado con X_o.

- θ es una secuencia de variables aleatorias i.i.d., independientes de (X_o, U), donde $\theta(k) \in \{0, 1\}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, y $\mathcal{P}_r\{\theta(k) = 0\} = p$ para algún $p \in (0, 1)$.
- $A(0), A(1), B(0)$ y $B(1)$ son matrices constantes, determinísticas y finitas de dimensiones apropiadas.

El sistema descrito anteriormente corresponde a un sistema lineal con saltos Markovianos (Markov Jump Linear System (MJLS) [2]).

1. Suponga que M, Y, N son matrices aleatorias, que Y es independiente de (M, N) y que (M, N) toma valores en el conjunto finito $\{(M_0, N_0), \cdots, (M_n, N_n)\}$, donde $n \in \mathbb{N}_0$. Demuestre que, si $\mathcal{P}_r\{(M, N) = (M_i, N_i)\} = p_i$, $p_i \in (0, 1)$, $p_0 + \cdots + p_n = 1$, entonces
$$\mathcal{E}\{MYN\} = \sum_{i=0}^{n} p_i M_i \mathcal{E}\{Y\} N_i. \tag{2}$$
2. Caracterice en forma recursiva la media, varianza y función de covarianza del proceso X en (1). (En el caso de la función de covarianza, considere retardos "τ" no negativos solamente.)
3. Establezca una condición suficiente y necesaria para que X admita una varianza y una función de covarianza estacionaria bien definidas. (La condición que establezca será, en realidad, suficiente y necesaria para que X sea asintóticamente estacionario en sentido amplio. Sin embargo, para demostrar esta última afirmación se necesita un "truco sucio".)

Problema 4

El objetivo de este problema es ilustrar cómo las ideas de factorizaciones espectrales pueden utilizarse para construir cierta factorización canónica, llamada *factorización inner-outer*, de una matriz de transferencia estable y propia. Esta factorización es clave en la solución de diversos problemas de control óptimo (vea, por ejemplo, [3, 5]).

Considere la siguiente definición y teorema:

Definition 1 (Funciones inner y outer)

1. *Una matriz de transferencia real racional $A(z)$ se dice inner si y sólo si es estable, propia y $A(z)^{\sim}A(z) = I$.*
2. *Una matriz de transferencia real racional se dice outer si y sólo si es estable, propia, y posee rango completo por filas para todo $|z| > 1$ (incluyendo $z = \infty$).* ∎

Theorem 1 *Si $P(z)$ es una función de transferencia real racional, estable y propia, entonces existe una función inner $P_i(z)$ y una función outer $P_o(z)$ tal que $P(z) = P_i(z)P_o(z)$. (Esta factorización se denomina factorización inner-outer de $P(z)$.)* ∎

1. Considere la función de transferencia $P(z) = \frac{z-3}{z(z-0.5)}$. Claramente,
$$P(z) = \frac{z-3}{z(1-3z)} \times \frac{1-3z}{z-0.5}. \tag{3}$$

   Muestre que el primer factor es inner y el segundo outer.

2. Apóyese en el ejemplo de la Parte 1 y pruebe el teorema anterior para el caso en que $P(z)$ sea una función de transferencia escalar. Para ello, provea una expresión explícita para el factor inner y el factor outer en términos de los polos, ceros y el grado relativo de $P(z)$.

3. Suponga que $P(z)$ es una función de transferencia real racional, estable y propia, cuadrada o rectangular con más filas que columnas, y que existe $n_P \in \mathbb{N}_0$ tal que $D \triangleq \lim_{z\to\infty} z^{n_P} P(z)$ satisface $D^T D > 0$. En estas condiciones, pruebe el Teorema 1 usando las ideas estudiadas en clase sobre factorizaciones espectrales. Para ello, provea un algoritmo que permita calcular numéricamente los factores inner y outer de $P(z)$. (**Ayuda:** Note que $P(z)^{\sim} P(z) = P_o(z)^{\sim} P_o(z)$.)

4. Ilustre la respuesta de la pregunta anterior utilizando Matlab y alguna función de transferencia de dimensión pequeña.

References

[1] K.J. Åström. *Introduction to Stochastic Control Theory.* Academic Press, New York, 1970.

[2] O.L.V. Costa, M.D. Fragoso, and R.P. Marques. *Discrete Time Markov Jump Linear Systems.* Springer, 2005.

[3] B. Francis. *A Course on H_∞ Control Theory.* Springer, 1987.

[4] T. Söderström. *Discrete-time stochastic systems.* Springer, second edition, 2002.

[5] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control.* Prentice Hall, 1996.