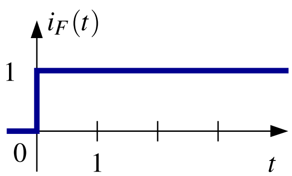
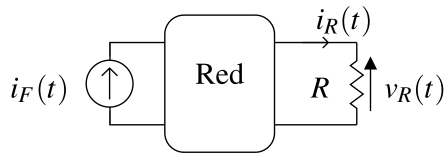
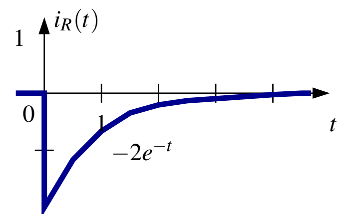
ELO102 – Teoría de Redes I – 2do. Semestre 2008
Solución Primer Certamen

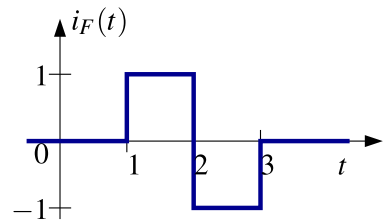
Problema 1.1 (10 puntos) *La red en la figura es lineal en invariante en el tiempo y todas las condiciones iniciales son cero. Se sabe que cuando $i_F(t) = \mu(t)$ [A] entonces la corriente por la resistencia es $i_R(t) = -2e^{-t}\mu(t)$ [A].*







Determine y grafique cualitativamente la corriente $i_R(t)$ cuando la red tiene condiciones iniciales iguales a cero, pero la corriente entregada por la fuente es la del siguiente gráfico



Solución:

Si la red es lineal e invariante en el tiempo, la nueva corriente $i_R(t)$ puede obtenerse mediante una combinación lineal de la respuesta a la excitación original $i_F(t) = \mu(t)$ desplazada y escalada.

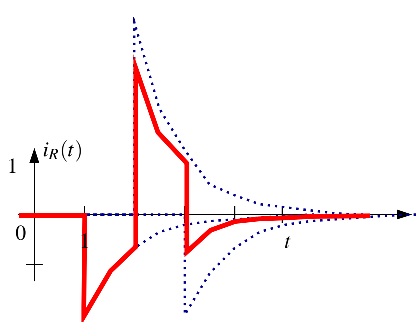
La nueva señal de excitación en la fuente de corriente puede expresarse como:

$$i_F(t) = \mu(t-1) - 2\mu(t-2) + \mu(t-3)$$

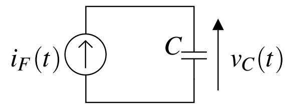
Por tanto la nueva respuesta, es decir, la corriente en la resistencia está dada por:

$$i_R(t) = -2e^{-(t-1)}\mu(t-1) + 4e^{-(t-2)}\mu(t-2) - 2e^{-(t-3)}\mu(t-3)$$

Un gráfico cualitativo se puede obtener combinando la respuesta a los tres escalones desplazados y escalados:



Problema 1.2 (10 puntos) *El condensador de la red de la figura se encuentra inicialmente cargado, $v_C(0) = -1$ [V] y $C = 1$ [F]. La fuente de corriente es $i_F(t) = e^{-t}\mu(t)$ [A].*



(a) Determine el voltaje en el condensador $v_C(t)$, para todo $t > 0$,

(b) Determine el ***cambio de energía total*** *del condensador, desde el instante $t = 0$ a $t = \infty$.*

Solución:

(a) El voltaje en el condesador depende de la carga, es decir, de la integral de la corriente que le entrega la fuente:

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_F(\tau)d\tau = -1 + \int_0^t e^{-\tau}d\tau = -e^{-t} \qquad ; t > 0$$

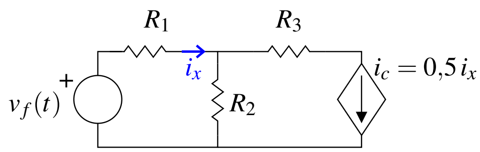
(b) El energía instantánea almacenada en el condensador está dada por:

$$E_C(t) = \frac{1}{2}C\,v_C(t)^2$$

Por tanto, el cambio de energía es

$$\Delta E_C = E_C(\infty) - E_C(0) = \frac{1}{2}C\,v_C(\infty)^2 - \frac{1}{2}C\,v_C(0)^2 = -\frac{1}{2}$$

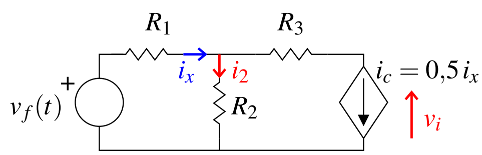
Problema 1.3 (15 puntos) *En el circuito de la figura $v_f(t) = 2\cos(\omega t)$ [V], $R_1 = 2$ [Ω] y $R_2 = R_3 = 4$ [Ω]. Determine el* ***valor efectivo*** *de la corriente $i_c(t)$ y la* ***potencia entregada o absorbida*** *por cada una de las fuentes.*



Solución:

Se observa que, haciendo LCK en en nodo *central*, si la corriente por la resistencia R_2 es i_2 entonces

$$i_x = i_c + i_2 = 0{,}5 i_x + i_2 \quad \Rightarrow i_2 = 0{,}5 i_x = i_c$$



Usando LVK y Ley de Ohm en la malla izquierda:

$$v_f = R_1\, i_x + R_2 i_2 = 2R_1\, i_c + R_2\, i_c$$

Por tanto,

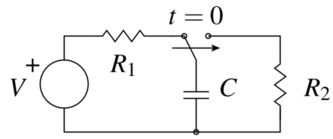
$$i_c = \frac{v_f}{2R_1 + R_2} = \frac{1}{4}\cos(\omega t) \quad \Rightarrow i_{c,RMS} = \frac{i_{c,\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ [A]}$$

La corriente por la fuente de voltaje es $i_x = 2i_c = \frac{1}{2}\cos(\omega t)$, por tanto la fuente **entrega** una potencia dada por:

$$p_V(t) = v_F(t)\, i_x(t) = \cos(\omega t)^2 \text{ [W]}$$

Por otra parte, dado que $i_2 = i_c$, el voltaje en la resistencia R_2 es igual al voltaje en la resistencia R_3 que, a su vez, son de igual valor. Por tanto el voltaje v_i en la fuente de corriente es cero y, por ende, **no absorbe ni entrega potencia**, es decir $p_I = 0$ [W].

Problema 1.4 (10 puntos) *En el circuito de la figura, determine la* ***energía total*** *entregada a la resistencia R_2 (para todo $t \in \mathbb{R}$), suponiendo que la fuente de tensión constante está activa desde $t = -\infty$ y el interruptor cambia de posición en $t = 0$.*



Solución:
En la figura se muestran los circuitos equivalentes para $t < 0$ y $t > 0$, respectivamente.

Para $t < 0$, la corriente por R_2 claramente es cero. En la malla izquierda, aplicando LCK, LVK y ley de componentes se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R_1 C} v_C = \frac{1}{R_1 C} V$$

Dado que la fuente de voltaje constante se encuentra actuando desde $t = -\infty$ sólo interesa el voltaje final en el condensador (antes de cambiar el interruptor en $t = 0$), es decir, $v_C(0) = V$. Note que el mismo resultado se puede obtener **SIN** plantear la ecuación diferencial sino que buscando la solución de *equilibrio*.

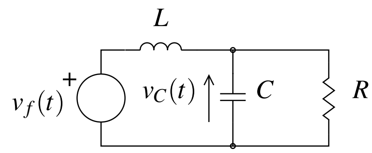
Para $t > 0$, sólo se tiene la malla de la derecha, en que el condensador se encuentra inicialmente cargado. Es decir, se puede obtener la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R_2 C} v_C = 0 \qquad ; t > 0$$
$$v_C(0) = V$$

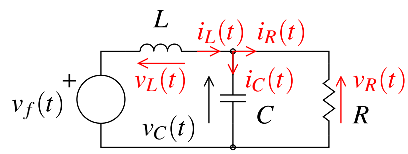
De donde es posible obtener v_c, i_2, la potencia instantánea y, finalmente, la energía total entregada a la resistencia. Sin embargo, por la **ley de conservación de la energía**, la energía total que se entrega a la resistencia es igual a la energía almacenada inicialmente en el condensador, es decir:

$$E_R, total = E_C(0) = \frac{1}{2} C v_C(0)^2 = \frac{CV^2}{2}$$

Problema 1.5 (10 puntos) *En el circuito de la figura, obtenga la ecuación diferencial que relaciona el voltaje en el condensador $v_C(t)$ con el voltaje en la fuente de tensión $v_f(t)$. (NO es necesario resolverla)*



Solución:



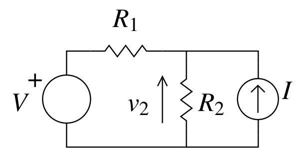
Definiendo voltajes y corrientes como en la figura, se pueden platear las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\textbf{LCK:} \quad & i_L = i_C + i_R \\
\textbf{LVK:} \quad & v_f = v_L + v_C \\
& v_C = v_R \\
\textbf{3er. postulado:} \quad & v_L = L\frac{di_L}{dt} \\
& i_C = C\frac{dv_C}{dt} \\
& v_R = R\, i_R
\end{aligned}
$$

Para obtener una ecuación diferencial que relacione v_C con v_F, podemos reemplazar en la primera ecuación obtenida mediante **LVK**:

$$
\begin{aligned}
v_f &= v_L + v_C \\
&= L\frac{di_L}{dt} + v_C \\
&= L\frac{di_C}{dt} + L\frac{di_R}{dt} + v_C \\
&= LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_R}{dt} + v_C \\
&= LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_C}{dt} + v_C
\end{aligned}
$$

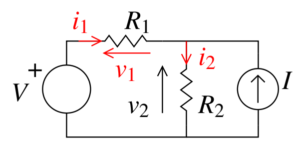
Problema 1.6 (15 puntos) *En el circuito de la figura, las fuentes de corriente y de voltaje son constantes y positivas, es decir,* $V > 0$ *e* $I > 0$.



(a) Determine bajo qué condición(es) ambas fuentes ***entregan*** *potencia al circuito (en términos de* V*,* I*,* R_1 *y* R_2*).*

(b) Si $V = 5$ *[V],* $I = 1$ *[A] y* $R_1 = R_2 = 1$ *[Ω], determine* v_2 *y la potencia entregada o absorbida por cada fuente.*

Solución:
Consideramos corrientes y voltajes como en la figura:



(a) Dado que $V > 0$ e $I > 0$ y por la referencia elegida en las fuentes, para que ambas entreguen potencia debe cumplirse que $i_1 > 0$ y $v_2 > 0$. Note además que $i_1 > 0$ si, y sólo si, $v_2 < V$. Por tanto las condiciones son

$$0 < v_2 < V$$

Para obtener el voltaje v_2, se pueden plantear las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \textbf{LCK:} \quad & i_2 = i_1 + I \\ \textbf{LVK:} \quad & V = v_1 + v_2 \\ \textbf{3er. postulado:} \quad & v_1 = R_1 i_1 \\ & v_2 = R_2 i_2 \end{aligned}$$

Reemplazando en ecuación correspondiente a **LVK** se obtiene:

$$V = R_1 i_1 + v_2 = R_1(i_2 - I) + v_2 = \frac{R_1}{R_2} v_2 - R_1 I + v_2$$

$$\Rightarrow \qquad v_2 = \frac{V + R_1 I}{1 + R_1/R_2}$$

Por tanto las condiciones para que ambas fuentes entreguen potencia están dadas por:

$$0 < \frac{V + R_1 I}{1 + R_1/R_2} < V$$

Adicionalmente, se puede observar que la desigualdad izquierda se cumple siempre (I, V, R_1 y R_2 son constantes positivas), mientras que la desigualdad derecha se puede reducir a $V > R_2 I$.

(b) Reemplazando los valores se obtiene

$$v_2 = \frac{5+1}{2} = 3 \text{ [V]}$$

Por tanto ambas fuentes entregan potencia:

$$p_I = v_2 I = 3 \text{ [W]}$$

$$p_V = V i_1 = V \frac{(V - v_2)}{R_1} = 5 \frac{(5-3)}{1} = 10 \text{ [W]}$$