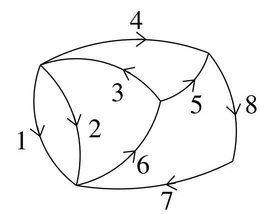
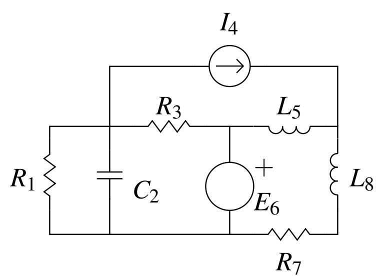
ELO102 – Teoría de Redes I – Semestre 2, 2008
Solución Segundo Certamen

Problema 2.1 (10 puntos) *En el grafo de la figura, los elementos* 1, 3 *y* 7 *son resistencias, el elemento* 2 *es un condensador, los elementos* 5 *y* 8 *son inductores, mientras que los elementos* 4 *y* 6 *son una fuente independiente de corriente y de voltaje, respectivamente, orientadas en el mismo sentido que en el grafo. Determine (dibuje) la red representada por el grafo.*

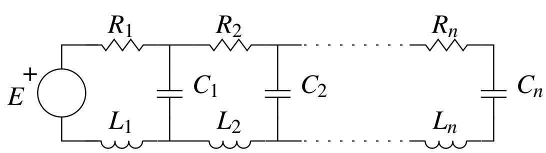


Solución:

A partir del grafo y la información entregada una posible representación de la red es:



Problema 2.2 (10 puntos) *Para la red de la figura, determine qué método, voltajes de nodo o corrientes de malla, da origen a un sistema de ecuaciones de menor dimensión (no es necesario formular las ecuaciones). Fundamente claramente su respuesta.*



Solución:

La red de la figura tiene $e = 3n+1$ elementos y $v = 2n+2$ vértices.

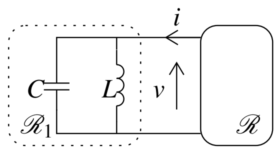
Si se aplica el método de voltaje de nodos, las incógnitas son $v-1 = 2n+1$ voltajes de nodo. Adicionalmente la fuente de tensión impone una **restricción adicional**.

La restricción adicional puede considerarse como una ecuación más entre los voltajes de nodo, dejando también como incógnita la corriente por dicha fuente. De esta forma se obtienen $v = 2n+2$ ecuaciones e incógnitas.

Otra alternativa es escoger uno de sus terminales como nodo de referencia, se conoce inmediatamente un voltaje de nodo, eliminando una incógnita. No es necesario formular LCK en el otro nodo de la fuente, es decir, una ecuación menos. De esta forma se obtienen $v-2 = 2n$ ecuaciones e incógnitas.

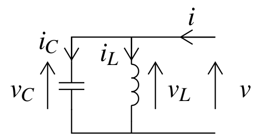
Por su parte, el método de mallas da lugar a un sistema de ecuaciones en que las incógnitas son las $e-v+1 = n$ corrientes de malla. Claramente este sistema es de menor dimensión.

Problema 2.3 (10 puntos) *Para la red de la figura, determine la característica terminal de la red $\mathscr{R}_1$ (es decir, la relación entre $i(t)$ y $v(t)$) con respecto de la red $\mathscr{R}$.*



Solución:

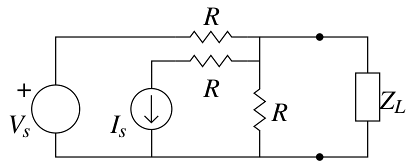
En la red $\mathscr{R}_1$ en la figura $v = v_L = v_C$, mientras que $i = i_L + i_C$



Reemplazando ecuaciones de ley de componentes (3er. postulado) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
i &= i_L + i_C \\
&= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)d\tau + C\frac{dv_C}{dt} \\
&= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau + C\frac{dv}{dt}
\end{aligned}
$$

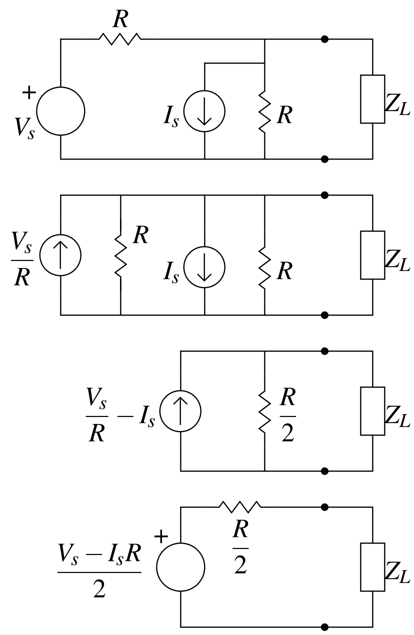
Problema 2.4 (10 puntos) *Para la red de la figura, determine la red equivalente* más simple posible *con respecto a la componente desconocida Z_L*



Solución:

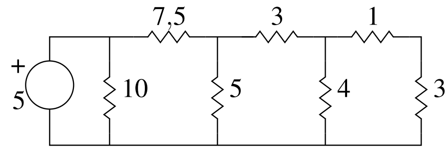
En la figura se muestra la secuencia de transformaciones:

- La resistencia en serie con la fuente de corriente es redundante.
- La fuente de voltaje en serie con la resistencia se transforma en fuente de corriente en paralelo con resistencia.
- Aplicando conmutatividad, se combinan las dos resistencias en paralelo y las fuentes de corriente se suman teniendo en cuenta la diferencia de sentido.



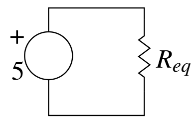
Finalmente es posible expresar la red más simple en cualquiera de las dos formas que se muestran en la últimas dos redes equivalentes.

Problema 2.5 (10 puntos) *Determine la potencia disipada por la fuente de voltaje*



Solución:

Para determinar la potencia disipada o entregada por la fuente es más simple reemplazar las resistencias por una resistencia equivalente:

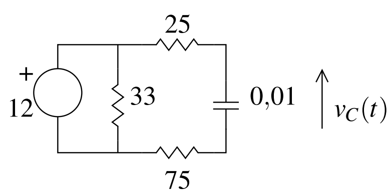


El valor de la resistencia equivalente R_{eq} se obtiene reduciendo sucesivamente resistencias en serie y paralelo:

$$\begin{aligned} R_{eq} &= 10 \parallel (7{,}5 + 5 \parallel (3 + 4 \parallel (1 + 3))) \\ &= 10 \parallel (7{,}5 + 5 \parallel (3 + 2)) \\ &= 10 \parallel (7{,}5 + 2{,}5) \\ &= 5[\Omega] \end{aligned}$$

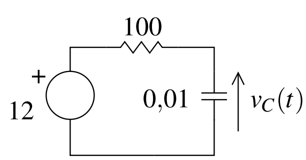
De esta forma, la corriente entregada por la fuente es $i = v/R_{eq} = 1$ [A] y, por tanto, la potencia que la fuente entrega es $p = v \cdot i = 5$ [W]. La potencia disipada, por tanto, es -5[W].

Problema 2.6 (10 puntos) *Determine el voltaje en el condensador $v_C(t)$, para $t > 0$, que se encuentra inicialmente descargado en $t = 0$.*



Solución:

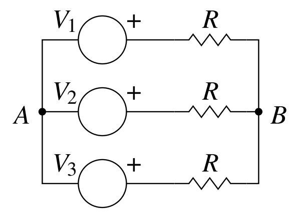
Desde los terminales del condensador, se obtiene una red equivalente más simple eliminando la resistencia de $33[\Omega]$ que es redundante. Adicionalmente, aplicando conmutatividad serie, es posible combinar las dos resistencias restantes en una sola de $25 + 75 = 100[\Omega]$. De esta forma se obtiene un circuito RC simple:



El voltaje en en condensador es entonces:

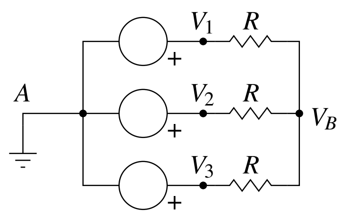
$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/RC} \\ &= 12(1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

Problema 2.7 (10 puntos) *En la red de la figura, mediante el método de voltaje de nodos, determine el voltaje en el nodo B considerando el nodo A como referencia.*



Solución:

Para el método de voltaje de nodo elegimos el nodo A como de referencia. Entonces se tienen 4 nodos en que plantear ecuaciones LCK en función de los voltajes de nodo:



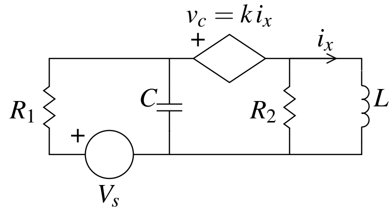
Sin embargo, 3 de los 4 voltajes de nodos están determinados por la fuente de voltaje por tanto, basta plantear LCK en el nodo B:

$$\frac{V_1 - V_B}{R} + \frac{V_2 - V_B}{R} + \frac{V_3 - V_B}{R} = 0$$

Despejando, se obtiene:

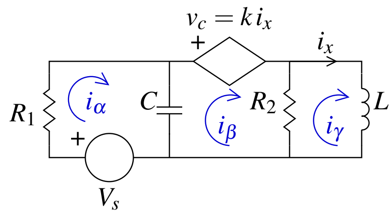
$$V_B = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$$

Problema 2.8 (10 puntos) *En la red de la figura, mediante el método de corrientes de malla, determine un conjunto de ecuaciones linealmente independientes que permitan resolver la red.*



Solución:

Definimos las corrientes de malla como en la figura:



Podemos usar formulación directa:

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{C}D^{-1} & -\frac{1}{C}D^{-1} & 0 \\ -\frac{1}{C}D^{-1} & \frac{1}{C}D^{-1} + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2 + LD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ -v_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

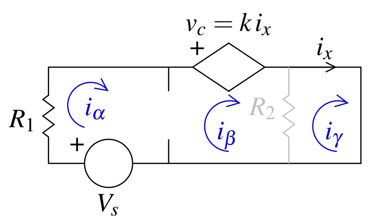
En la ecuación matricial anterior aparecen 4 incógnitas: las corrientes de malla (i_α, i_β, i_γ) y el voltaje de la fuente controlado. Para tener un sistema de ecuaciones consistente se debe agregar la expresión de la fuente controlada **en función de las corrientes de malla**, es decir:

$$v_c = k\,i_\gamma$$

Problema 2.9 (10 puntos) *En la red del problema anterior, determine el valor estacionario de las corrientes de malla cuando $t \to \infty$, suponiendo que la fuente independiente de voltaje V_s es constante.*

Solución:

Si la fuente independiente de voltaje es constante, cuando $t \to \infty$ todas las corrientes y voltajes en el circuito son **constantes**. En consecuencia, el condensador es equivalente a un circuito abierto y la inductancia es equivalente a un cortocircuito:



A partir de la red equivalente en la figura, tenemos que

$$i_\alpha(\infty) = i_\beta(\infty) = i_\gamma(\infty) = i_x(\infty)$$

La corriente i_x se obtiene haciendo LVK y la ecuación de la fuente controlada:

$$V_s = R_1\,i_x + v_c$$
$$v_c = k\,i_x$$

La solución del sistema de ecuaciones es $i_x = \dfrac{V_s}{R_1 + k}$