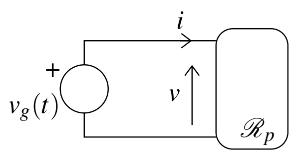
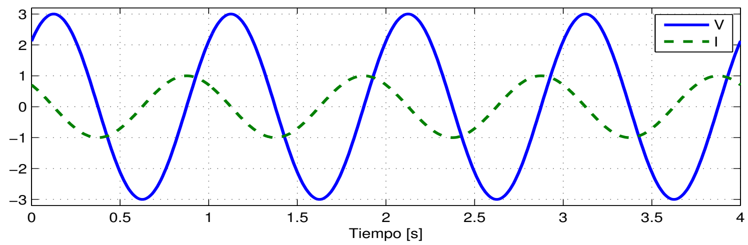
ELO102 – Teoría de Redes I – Semestre 2, 2008
Solución Tercer Certamen

Problema 3.1 (10 puntos) *En la red de la figura se han efectuado las mediciones de voltaje [V] y corriente [A] que se muestran en el gráfico a la derecha. Determine (aproximadamente) la impedancia equivalente correspondiente a la red pasiva $\mathscr{R}_p$*





Solución:

De la figura se aprecia que:

(a) El período de las señales es $T = 1$[s], por tanto la frecuencia es $f = 1$[Hz], o bien, $\omega = 2\pi$[rad/s]

(b) La amplitud del voltaje es $\hat{V} = 3$ y la de la corriente es $\hat{I} = 1$.

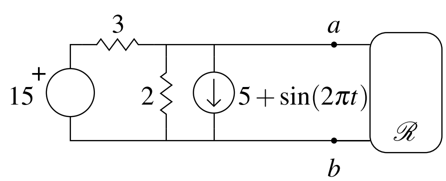
(c) La señal de corriente *adelanta* a la de voltaje en aproximadamente 0,25[s], es decir, 1/4 de período.

Por tanto

$$v(t) = 3\cos(2\pi t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \underset{\cdot}{V} = 3\angle\phi$$
$$i(t) = \cos(2\pi t + \phi + \pi/2) \quad \Rightarrow \quad \underset{\cdot}{I} = 1\angle(\phi + \tfrac{\pi}{2})$$

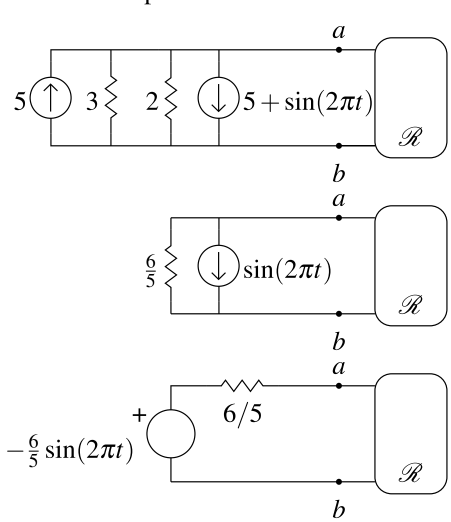
La impedancia es, entonces $\underset{\cdot}{Z} = \underset{\cdot}{V}/\underset{\cdot}{I} = 3\angle(-\frac{\pi}{2}) = -3j[\Omega]$

Problema 3.2 (10 puntos) *En la red de la figura, determine el equivalente Thévenin desde los terminales $a-b$.*

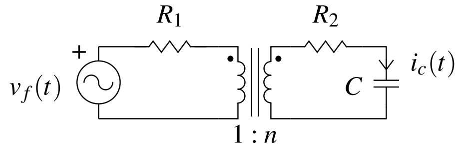


Solución:

La red Thévenin equivalente se puede obtener por transformaciones sucesivas de la red dada:

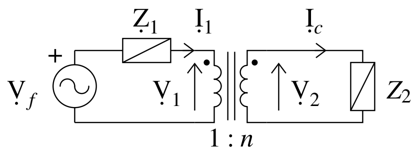


Problema 3.3 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_f(t) = 100\sin(\omega t)[V]$, $R_1 = 30[\Omega]$, $R_2 = 500[\Omega]$, $1/\omega C = 600[\Omega]$ y el transformador ideal tiene una relación de vueltas $n = 10$. Determine la corriente $i_c(t)$ en estado estacionario.*



Solución:

El análisis de la red en estado estacionario puede hacerse usando transformadas fasoriales e impedancias:



$$\begin{aligned}
\underset{\cdot}{V}_f &= 100\angle(-\tfrac{\pi}{2}) \\
\underset{\cdot}{Z}_1 &= R_1 = 30 \\
\underset{\cdot}{Z}_2 &= R_2 + \frac{1}{j\omega C} = 100(5-6j)
\end{aligned}$$

El transformador ideal establece que:

$$\begin{aligned}
\underset{\cdot}{V}_2 &= n\underset{\cdot}{V}_1 \\
\underset{\cdot}{I}_c &= \frac{1}{n}\underset{\cdot}{I}_1
\end{aligned}$$

Mientras que las impedancias establecen la relación entre voltajes y corrientes:

$$\begin{aligned}
\underset{\cdot}{V}_f - \underset{\cdot}{V}_1 &= \underset{\cdot}{Z}_1\underset{\cdot}{I}_1 \\
\underset{\cdot}{V}_2 &= \underset{\cdot}{Z}_2\underset{\cdot}{I}_c
\end{aligned}$$

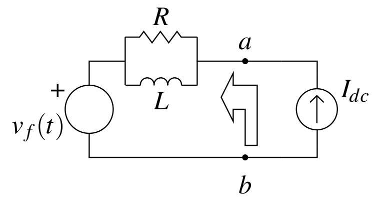
Resolviendo para $\underset{\cdot}{I}_c$ se obtiene:

$$\underset{\cdot}{I}_c = \frac{\underset{\cdot}{V}_f}{\underset{\cdot}{Z}_2/n + \underset{\cdot}{Z}_1 n} = \frac{100\angle(-\frac{\pi}{2})}{10(5-6j)+300} = \frac{10\angle(-\frac{\pi}{2})}{35-6j} = \frac{10}{\sqrt{35^2+6^2}}\angle(\phi - \tfrac{\pi}{2})$$

en que $\phi = \arctan(\frac{6}{35})$.

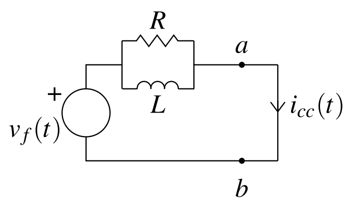
Por tanto, la corriente en estado estacionario es $\quad i_c(t) = \dfrac{10}{\sqrt{35^2+6^2}}\cos(\omega t + \phi - \tfrac{\pi}{2})$

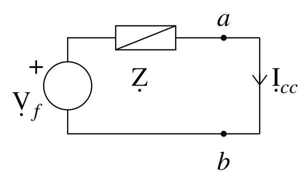
Problema 3.4 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_f(t) = 2\cos(100t)[V]$, $R = 80[\Omega]$, $L = 0{,}6[H]$ e $I_{dc} = 0{,}1[A]$. Determine el equivalente Norton de la red a la izquierda de los terminales $a-b$, en estado estacionario.*



Solución:

Para obtener el equivalente Norton, primero obtenemos la corriente de cortocircuito, mediante análisis estacionario.





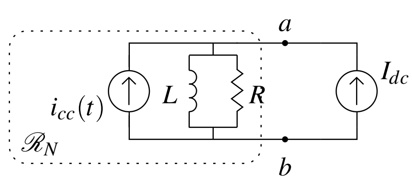
De la representación con transformadas fasoriales de la derecha tenemos que $\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_{cc} = \dfrac{\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_f}{\underset{\cdot}{\mathrm{Z}}}$, en que

$$
\begin{aligned}
\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_f &= 2\angle 0 \\
\underset{\cdot}{\mathrm{Z}} &= R \parallel j\omega L = \frac{j\omega LR}{j\omega L + R} \\
&= \frac{j\cdot 100\cdot 0{,}6\cdot 80}{j\cdot 100\cdot 0{,}6 + 80} = 48\angle(\tfrac{\pi}{2} - \arctan(\tfrac{3}{4}))
\end{aligned}
$$

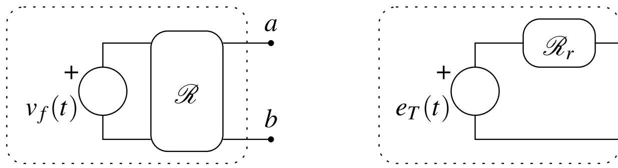
Por lo tanto,

$$
\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_{cc} = \frac{1}{24}\angle(\arctan(\tfrac{3}{4}) - \tfrac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad i_{cc}(t) = \frac{1}{24}\cos(100t + \arctan(\tfrac{3}{4}) - \tfrac{\pi}{2})
$$

La red relajada del equivalente Norton se obtiene apagando la fuente de voltaje en la red original y simplificando (si es posible) la red restante. De esta forma se obtiene que dicha red es la misma que aparece en la red dada, es decir, la resistencia R en paralelo a la inductancia L. El equivalente Norton entonces es:



Problema 3.5 (10 puntos) *En la figura de la izquierda, la única excitación de la red eléctrica es $v_f(t) = \cos(\omega t)[V]$ y $\mathscr{R}$ tiene condiciones iniciales iguales a cero. A la derecha se muestra su equivalente Thévenin en que $\mathscr{R}_r$ es una red relajada y la fuente Thévenin es $e_T(t) = 3\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})[V]$. Se afirma que si $v_f(t) = \cos(2\omega t)[V]$, entonces el correspondiente equivalente Thévenin es la red de la derecha en que $e_T(t) = 3\cos(2\omega t - \frac{\pi}{4})[V]$. Determine si la afirmación es correcta o incorrecta, fundamentando claramente su respuesta.*



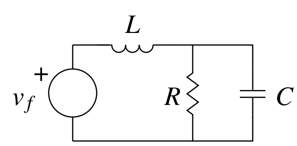
Solución:

Al cambiar la frecuencia angular de la fuente de voltaje $v_f(t)$, habrá un cambio en la fuente Thévenin $e_T(t)$ que resume el efecto de las excitaciones en la red dada.

Para obtener esta fuente es necesario obtener el voltaje de circuito abierto. Sin embargo, **NO** es posible obtener este voltaje de circuito abierto sin conocer la red $\mathscr{R}$. Por análisis estacionario, sabemos que este voltaje tendrá la misma frecuencia de la nueva excitación, es decir, 2ω. La magnitud y ángulo de desfase cuando $v_f(t) = \cos(2\omega t)$ serán, en general, diferentes que cuando la frecuencia angular es ω.

Por lo tanto, la afirmación **NO** es correcta porque no se puede obtener la fuente Thévenin.

Problema 3.6 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_f(t) = 12\cos(2t)[V]$, $R = 1[\Omega]$, $L = 0{,}2[H]$ y $C = 0{,}5[F]$. Determine el factor de potencia (FP) desde el punto de vista de la fuente, indicando si es inductivo o capacitivo, y la potencia aparente que se entrega a la resistencia R.*



Solución:

El factor de potencia está determinado por el ángulo de la impedancia equivalente conectada a la fuente, es decir, $FP = \cos\varphi$.

La impedancia equivalente es

$$\begin{aligned} \underset{\cdot}{Z}_{eq} &= j\omega L + R \parallel \frac{1}{j\omega C} = j \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 1 \parallel \frac{1}{j \cdot 2 \cdot 0{,}5} \\ &= j0{,}4 + \frac{1}{1+j} = \frac{5-j}{10} \end{aligned}$$

De donde se obtiene $FP = \cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{26}}$. El ángulo de la impedancia es negativo, por tanto el FP es capacitivo.

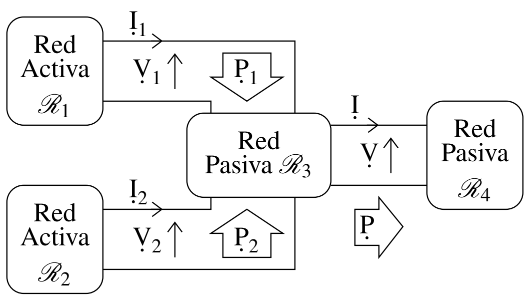
La potencia aparente que entra a la resistencia R es igual a la potencia activa que entrega la fuente. Para obtener la potencia activa basta calcular la magnitud de la corriente que sale de la fuente:

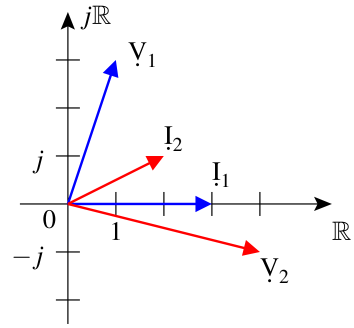
$$|\underset{\cdot}{I}| = \frac{|\underset{\cdot}{V}_f|}{|\underset{\cdot}{Z}_{eq}|} = \frac{12}{\frac{1}{10}|5-j|} = \frac{120}{\sqrt{26}}$$

La potencia activa entragada por la fuente es entonces:

$$P_{ac} = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{120}{\sqrt{26}} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{1800}{13}[\text{W}]$$

Problema 3.7 (10 puntos) *En la super-red de la figura izquierda las subredes $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ son activas (contienen fuentes), mientras que $\mathscr{R}_3$ y $\mathscr{R}_4$ son pasivas (es decir, no contienen fuentes). Si las transformadas fasoriales de las corrientes y voltajes son como en la figura derecha, determine la máxima potencia activa que puede entregarse a $\mathscr{R}_4$.*





Solución:

Dado que la red $\mathscr{R}_3$ es pasiva, sus componentes almacenan o disipan energía. Por lo tanto, la máxima potencia activa que se puede estar entregando a la red $\mathscr{R}_4$ será la suma de potencias activas entregradas por las redes activas $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$.

Del gráfico de la derecha se obtiene:

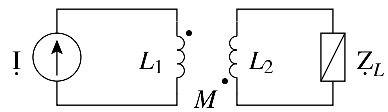
$$\left.\begin{aligned} \underset{\cdot}{V}_1 &= 1+j3 \\ \underset{\cdot}{I}_1 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \underset{\cdot}{P}_1 = \frac{1}{2}\underset{\cdot}{V}_1\underset{\cdot}{I}_1^* = \frac{(1+j3)3}{2} = \frac{3}{2}+j\frac{9}{2}\,[\text{VA}]$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\cdot}{V}_2 &= 4-j \\ \underset{\cdot}{I}_2 &= 2+j \end{aligned}\right\} \quad \underset{\cdot}{P}_2 = \frac{1}{2}\underset{\cdot}{V}_2\underset{\cdot}{I}_2^* = \frac{(4-j)(2-j)}{2} = \frac{7}{2}-j3\,[\text{VA}]$$

Por tanto, la máxima potencia activa entregada a $\mathscr{R}_4$ es:

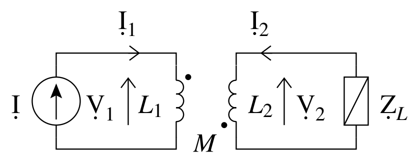
$$\text{máx}\, P_{ac} = \Re\{\underset{\cdot}{P}_1\} + \Re\{\underset{\cdot}{P}_2\} = \frac{3}{2}+\frac{7}{2} = 5[\text{W}]$$

Problema 3.8 (10 puntos) *En la red de la figura, determine la potencia aparente que entra a la carga* $\underset{\cdot}{Z}_L$. *Datos:* $\underset{\cdot}{I} = 5\angle\frac{\pi}{4}[A]$, $\omega L_1 = 1[\Omega]$, $\omega L_2 = 100[\Omega]$, $\omega M = 9[\Omega]$, $\underset{\cdot}{Z}_L = 90 - j10[\Omega]$.



Solución:

Para determinar la potencia aparente que entra a $\underset{\cdot}{Z}_L$ se requiere obtener ya sea la transformada fasorial de la corriente o del voltaje en ella. Si consideramos las variables como en la figura, se plantean las siguientes ecuaciones:



$$
\begin{aligned}
\underset{\cdot}{I} &= \underset{\cdot}{I}_1 \\
\underset{\cdot}{V}_1 &= j\omega L_1\,\underset{\cdot}{I}_1 - j\omega M\,\underset{\cdot}{I}_2 \\
\underset{\cdot}{V}_2 &= -j\omega M\,\underset{\cdot}{I}_1 + j\omega L_2\,\underset{\cdot}{I}_2 \\
\underset{\cdot}{V}_2 &= \underset{\cdot}{Z}_L(-\underset{\cdot}{I}_2)
\end{aligned}
$$

Resolviendo para $\underset{\cdot}{I}_2$ y reemplazando los valores, se obtiene:

$$\underset{\cdot}{I}_2 = \frac{j\omega M\,\underset{\cdot}{I}}{\underset{\cdot}{Z}_L + j\omega L_2} = \frac{j9\cdot 5\angle\frac{\pi}{4}}{90 - j10 + j100} = \frac{45\angle\frac{3\pi}{4}}{90(1+j)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\angle\frac{\pi}{2} = j\frac{\sqrt{2}}{4}\,[\mathrm{A}]$$

El voltaje es entonces

$$\underset{\cdot}{V}_2 = \underset{\cdot}{Z}_L(-\underset{\cdot}{I}_2) = (90 - j10)(-j\tfrac{\sqrt{2}}{4}) = \frac{-5(1+j9)}{\sqrt{2}}$$

La potencia aparente que entra a $\underset{\cdot}{Z}_L$ es entonces

$$\underset{\cdot}{P} = \frac{1}{2}\underset{\cdot}{V}_2(-\underset{\cdot}{I}_2)^* = \frac{1}{2}\cdot\frac{-5(1+j9)}{\sqrt{2}}\cdot\left(-j\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^* = \frac{5(9-j)}{8} = \frac{45}{8} - j\frac{5}{8}\,[\mathrm{VA}]$$