

ELO102 – Teoría de Redes I – 1er. Semestre 2009

Primer Certamen y soluciones.

Problema 1.1 (10 puntos) Un sistema S cuya excitación es $e(t)$ y su estado inicial es x_0 tiene una respuesta $r(t)$ dada por

$$r(t) = T\langle x_0, e(t) \rangle = \cos(e(t) + x_0)$$

Se afirma que el sistema es lineal y que es invariante en el tiempo. Demuestre o refute estas afirmaciones fundamentando claramente su respuesta

Solución

El sistema es no lineal pues, por ejemplo, no se cumple superposición a estado y excitación:

$$T\langle x_0, e(t) \rangle = \cos(e(t) + x_0) = \cos(e(t)) \cos(x_0) - \sin(e(t)) \sin(x_0)$$

$$T\langle x_0, 0 \rangle = \cos(x_0)$$

$$T\langle 0, e(t) \rangle = \cos(e(t))$$

Por lo tanto,

$$T\langle x_0, e(t) \rangle \neq T\langle x_0, 0 \rangle + T\langle 0, e(t) \rangle$$

La primera afirmación es **falsa**.

El sistema es invariante en el tiempo pues, si consideramos la parte de la respuesta que depende de la excitación:

$$r_e(t) = T\langle 0, e(t) \rangle = \cos(e(t))$$

Entonces

$$T\langle 0, e(t - t_0) \rangle = \cos(e(t - t_0)) = r_e(t - t_0)$$

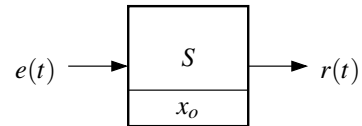
La segunda afirmación es **verdadera**.

Problema 1.2 (10 puntos) El sistema S de la figura es lineal, pero variante en el tiempo, con excitación $e(t)$, estado inicial x_0 y respuesta $r(t)$, es decir; $T\langle x_0, e(t) \rangle = r(t)$. Adicionalmente, se sabe que $T\langle x_0, 2e(t) \rangle = 2r(t)$. Determine (si es posible)

(a) $T\langle x_0, 0 \rangle$

(b) $T\langle 0, e(t) \rangle$

(c) $T\langle 2x_0, e(t) \rangle$



Solución

Dado que el sistema es lineal tenemos que, por superposición,

$$\underbrace{T\langle x_0, 2e(t) \rangle}_{2r(t)} = \underbrace{T\langle x_0, e(t) \rangle}_{r(t)} + T\langle 0, e(t) \rangle$$

Por lo tanto, $T\langle 0, e(t) \rangle = r(t)$ lo que resuelve el punto (b)

Usando este resultado y también por superposición tenemos que

$$\underbrace{T\langle x_0, e(t) \rangle}_{r(t)} = \underbrace{T\langle 0, e(t) \rangle}_{r(t)} + T\langle x_0, 0 \rangle$$

Por lo tanto, $T\langle x_0, 0 \rangle = 0$ lo que resuelve el punto (a)

Finalmente, el punto (c) se obtiene directamente por superposición

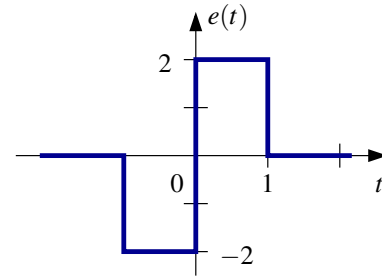
$$T\langle 2x_0, e(t) \rangle = 2T\langle x_0, 0 \rangle + T\langle 0, e(t) \rangle = 2 \cdot 0 + r(t) = r(t)$$

Los resultados anteriores no dependen de que el sistema sea o no invariante en el tiempo.

Problema 1.3 (10 puntos) La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo cuando la excitación es un impulso unitario y el estado inicial es cero está dada por

$$h(t) = T\langle 0, \delta(t) \rangle = \mu(t) - \mu(t-1)$$

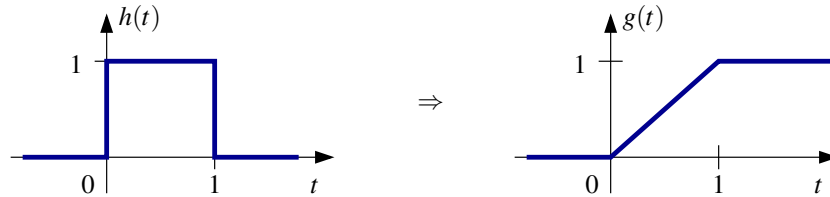
- (a) Determine y grafique la respuesta del sistema cuando la excitación es un escalón unitario $\mu(t)$ y el estado inicial es cero.
- (b) Determine y grafique la respuesta del sistema cuando la excitación es como en la figura de la derecha y el estado inicial es cero.



Solución

- (a) El escalón unitario es igual a la integral de un impulso unitario. Dado que el sistema es lineal e invariante en el tiempo, la respuesta cuando la excitación es un escalón unitario se obtiene a partir de la respuesta a impulso $h(t)$:

$$g(t) = T\langle 0, \mu(t) \rangle = T\left\langle 0, \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \right\rangle = \int_{-\infty}^t T\langle 0, \delta(\tau) \rangle d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = r(t) - r(t-1)$$



- (b) La excitación de la figura puede expresarse analíticamente como:

$$e(t) = -2\mu(t+1) + 4\mu(t) - 2\mu(t-1)$$

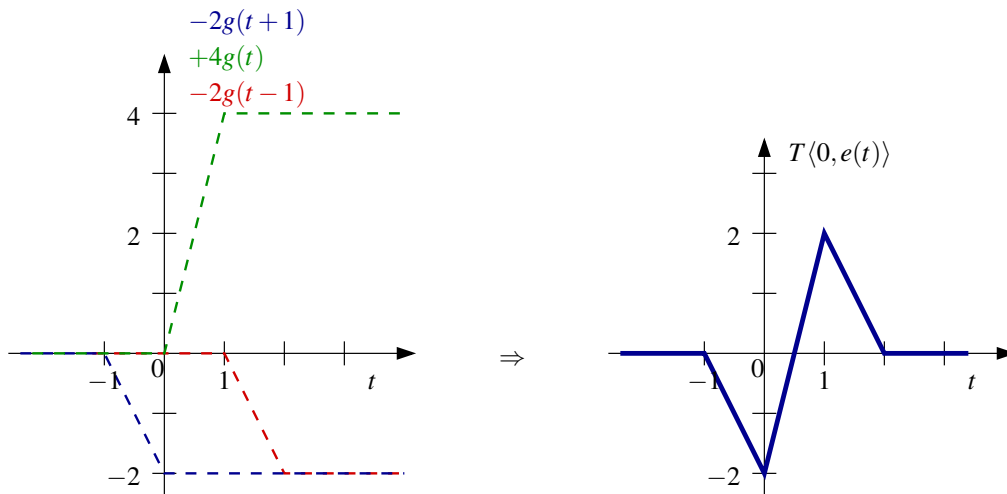
Por lo tanto, para determinar la respuesta podemos usar superposición e invarianza en el tiempo

$$T\langle 0, e(t) \rangle = -2g(t+1) + 4g(t) - 2g(t-1) \quad (1)$$

$$= -2(r(t+1) - r(t)) + 4(r(t) - r(t-1)) - 2(r(t-1) - r(t-2))$$

$$= -2r(t+1) + 6r(t) - 6r(t-1) + 2r(t-2) \quad (2)$$

Para obtener el gráfico se pueden superponer las respuestas a escalón obtenidas en la ecuación (1), o bien, las rampas obtenidas en la ecuación (2). Usando la ecuación (1)



Problema 1.4 (10 puntos) La figura muestra un sistema S formado por la interconexión de dos sistemas estáticos (sin estado interno) y sus características respuesta v/s excitación. Se afirma que

(a) S_1 y S_2 son no lineales

(b) S es lineal.

Demuestre o refute estas afirmaciones fundamentando claramente su respuesta.

Solución

(a) De los gráficos respuesta v/s excitación se obtiene que

$$\text{Sistema } S_1: r_1(t) = T\langle e_1(t) \rangle = -0,5e_1(t) - 1$$

$$\text{Sistema } S_2: r_2(t) = T\langle e_2(t) \rangle = e_2(t) + 1$$

Note que ambos sistemas son no lineales pues, por ejemplo, no satisfacen homogeneidad:

$$\begin{aligned} \text{Sistema } S_1: T\langle 2e_1(t) \rangle &= -e_1(t) - 1 \\ &\neq 2(-0,5e_1(t) - 1) = 2T\langle e_1(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sistema } S_2: T\langle 2e_2(t) \rangle &= 2e_2(t) + 1 \\ &\neq 2(e_2(t) + 1) = 2T\langle e_2(t) \rangle \end{aligned}$$

La afirmación es **verdadera**.

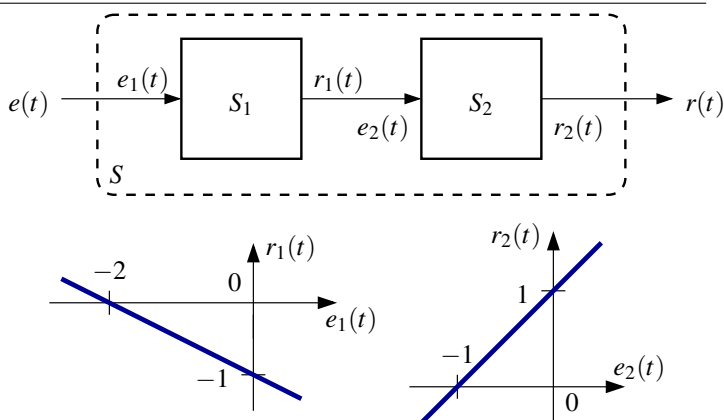
(b) El sistema completo S tiene como excitación $e(t) = e_1(t)$ y respuesta $r(t) = r_2(t)$. Adicionalmente, la interconexión establece que $r_1(t) = e_2(t)$. Combinando las ecuaciones obtenidas en el ítem (a) anterior, tenemos que

$$r_2(t) = e_2(t) + 1 = r_1(t) + 1 = (-0,5e_1(t) - 1) + 1 = -0,5e_1(t)$$

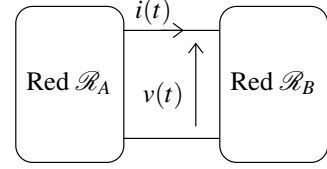
Por tanto

$$\text{Sistema } S: r(t) = T\langle e(t) \rangle = -0,5e(t)$$

Esto corresponde a una relación lineal, pues satisface superposición y homogeneidad. La afirmación es **verdadera**.



Problema 1.5 (10 puntos) En la figura se muestra la interconexión de dos redes $\mathcal{R}_A$ y $\mathcal{R}_B$. La corriente es $i(t) = e^{-t/\tau}\mu(t)[A]$ y el voltaje es $v(t) = (1 - e^{-t/\tau})\mu(t)[V]$, en que $\tau > 0$ y $\mu(t)$ es un escalón unitario. Determine la energía total que entrega la red $\mathcal{R}_B$ para $t \in (-\infty, \infty)$.



Solución

La energía total E_T es la integral en $t \in (-\infty, \infty)$ de la potencia instantánea $p_e(t)$ que entrega la red $\mathcal{R}_B$:

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} p_e(t) dt$$

La potencia instantánea $p_e(t)$ entregada por la red $\mathcal{R}_B$ es igual al producto del voltaje entre los terminales de la red $\mathcal{R}_B$ y la corriente que fluye a través de ella, en referencia **no combinada**. En la figura aparecen en referencia combinada para la red $\mathcal{R}_B$, por lo que se debe introducir un cambio de signo. Por tanto,

$$\begin{aligned} E_T &= \int_{-\infty}^{\infty} p_e(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [-v(t)] i(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-(1 - e^{-t/\tau})\mu(t)] [e^{-t/\tau}\mu(t)] dt \\ &= \int_0^{\infty} (-e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}) dt \\ &= \tau e^{-t/\tau} \Big|_0^{\infty} - \frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{\tau}{2} [J] \end{aligned}$$

Problema 1.6 (10 puntos) Considere la figura del problema anterior que muestra la interconexión de dos redes $\mathcal{R}_A$ y $\mathcal{R}_B$. La corriente es $i(t) = I \cos(t)[A]$ y el voltaje es $v(t) = V \cos(t - \frac{\pi}{4})[V]$, en que $I > 0$ y $V > 0$. Determine si la red $\mathcal{R}_B$ absorbe o entrega potencia.

Solución

La potencia instantánea $p_a(t)$ absorbida por la red $\mathcal{R}_B$ es el producto de corriente y voltaje en referencia combinada, tal como aparecen en la figura. Por tanto,

$$\begin{aligned} p_a(t) &= v(t)i(t) = [V \cos(t - \frac{\pi}{4})][I \cos(t)] \\ &= \frac{VI}{2} [\cos(t - \frac{\pi}{4} + t) + \cos(t - \frac{\pi}{4} - t)] \\ &= \frac{VI}{2} [\cos(2t - \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4})] \\ &= \frac{VI}{2} [\cos(2t - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2}] \end{aligned}$$

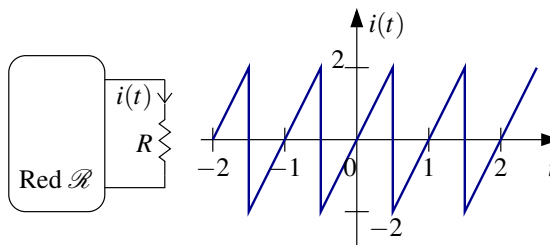
La expresión entre corchetes es una senoide más una constante, por tanto, a partir de sus valores máximos y mínimos se puede determinar si la red $\mathcal{R}_B$ absorbe o entrega potencia:

$$\begin{aligned} \hat{p}_a &= \max p_a(t) = \frac{VI}{2} [1 + \frac{\sqrt{2}}{2}] > 0 \\ \check{p}_a &= \min p_a(t) = \frac{VI}{2} [-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}] < 0 \quad (\text{pues } \frac{\sqrt{2}}{2} < 1) \end{aligned}$$

Esto indica que la potencia instantánea $p_a(t)$ absorbida toma valores positivos y negativos, es decir, la red $\mathcal{R}_B$ alternativamente absorbe y entrega potencia.

Problema 1.7 (10 puntos) En la figura se muestra una resistencia $R = 2[\Omega]$ conectada a una red $\mathcal{R}$. La corriente por la resistencia es la señal periódica de la figura derecha.

- (a) Determine y grafique la potencia instantánea $p(t)$ entregada por la red $\mathcal{R}$
- (b) Determine la potencia promedio disipada por la resistencia R .



Solución

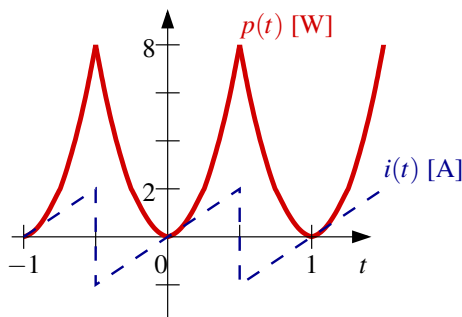
- (a) La potencia instantánea entregada por la red $\mathcal{R}$ es igual a la potencia instantánea disipada por la resistencia R . Ésta última se puede obtener en función de la corriente $i(t)$:

$$p(t) = v(t)i(t) = [Ri(t)]i(t) = R[i(t)]^2 = 2[i(t)]^2$$

Si nos restringimos a un periodo fundamental de la señal de corriente:

$$i(t) = 4t [\text{A}] \Rightarrow p(t) = 2[i(t)]^2 = 32t^2 [\text{W}] \quad ; t \in (-0,5; 0,5)$$

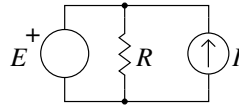
Por tanto, el gráfico de la potencia $p(t)$ se puede obtener a partir del gráfico de la corriente



- (b) La potencia promedio puede calcularse, por ejemplo, en el intervalo $[0; 0,5]$

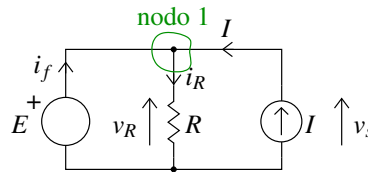
$$\bar{p} = \frac{1}{0,5} \int_0^{0,5} p(t) dt = \frac{1}{0,5} \int_0^{0,5} 32t^2 dt = \frac{64}{3} t^3 \Big|_0^{0,5} = \frac{8}{3} [\text{W}]$$

Problema 1.8 (10 puntos) En el circuito de la figura, las fuentes de voltaje y corriente son constantes, con $E > 0$ e $I > 0$. Determine bajo qué condiciones **ambas** fuentes entregan potencia.



Solución

En primer lugar, definimos señales adicionales en el circuito



Las fuentes y la resistencia R están conectadas a los mismos nodos, por tanto, existe la misma diferencia de potencial entre sus terminales

$$E = v_R = v_s$$

Esto implica que, para la fuente de corriente, la potencia entregada es

$$p_I = v_s \cdot I = E \cdot I > 0$$

Es decir, la fuente de corriente **siempre entrega potencia** pues $E > 0$ e $I > 0$

La potencia entregada por la fuente de tensión es

$$p_E = E \cdot i_f$$

Por tanto, para que entregue potencia, la corriente i_f debe ser positiva pues $E > 0$. Esta corriente se puede obtener observando que el **nodo 1** (indicado en la figura) no acumula carga, por tanto

$$i_f + I - i_R = 0$$

La corriente i_R por la resistencia se puede obtener mediante la ley de Ohm

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{E}{R}$$

Por lo tanto, la condición para que la fuente de voltaje entregue potencia es

$$i_f = \frac{E}{R} - I > 0$$