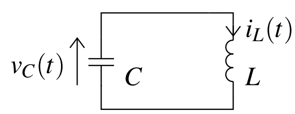
ELO102 – Teoría de Redes I
Segundo Certamen y soluciones – 1er. Semestre 2009

Problema 2.1 (10 puntos) *En el circuito de la figura $L = 2$[mH] y $C = 50$[mF]. En cierto instante de tiempo $t = t_o$, la corriente $i_L(t_o) = -10$[A] y el voltaje $v_C(t_o) = 2$[V]. Determine*

(a) La frecuencia de oscilación y

(b) La amplitud máxima del voltaje en el condensador $v_c(t)$.



Solución

(a) Por LVK, LCK y ley de componentes tenemos las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\textbf{(LVK)} \quad & v_C(t) = v_L(t) \\
\textbf{(LCK)} \quad & i_C(t) = -i_L(t) \\
\textbf{(Condensador)} \quad & i_C(t) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt} \\
\textbf{(Inductancia)} \quad & v_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

Por tanto, la ecuación diferencial que se obtiene para el voltaje $v_c(t)$ es:

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} v_C(t) = 0$$

Como vimos en clase la solución de esta ecuación es de la forma:

$$v_C(t) = A\cos(\omega_{LC} t + \phi)$$

en que

$$\omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2\times 10^{-3})(50\times 10^{-3})}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4}}} = 100\,[\text{rad/s}]$$

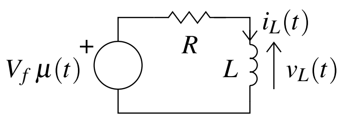
(b) La amplitud máxima y ángulo de fase dependen de las condiciones iniciales, sin embargo, la amplitud máxima del voltaje en el condensador corresponde al instante en que **toda** la energía del circuito está almacenada en él y, por ende, la corriente por la inductancia es igual a cero. Por lo tanto:

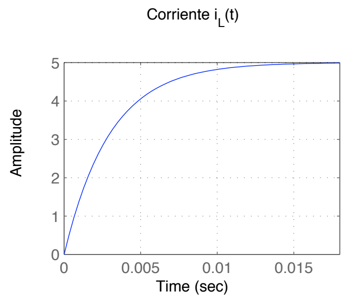
$$\frac{1}{2} C\,(v_{C,\text{máx}})^2 = \frac{1}{2} C\,(v_C(t_o))^2 + \frac{1}{2} L\,(i_L(t_o))^2$$

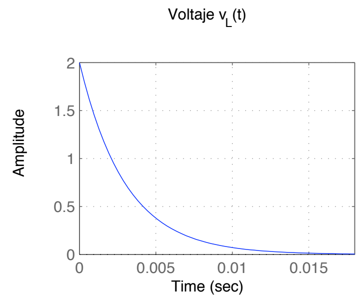
Por tanto,

$$v_{C,\text{máx}} = \sqrt{(v_C(t_o))^2 + \frac{L}{C}\,(i_L(t_o))^2} = \sqrt{2^2 + \frac{2\times 10^{-3}}{50\times 10^{-3}}(-10)^2} = 2\sqrt{2}$$

Problema 2.2 (10 puntos) *En la figura se muestra un circuito RL y los gráficos de la corriente y el voltaje por la inductancia cuando la fuente de voltaje constante se enciende en $t = 0$. Determine los valores del voltaje V_f, la resistencia R y la inductancia L.*







Solución

Por LVK, LCK y ley de componentes tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\textbf{(LVK)} \quad & V_f = v_R + v_L(t) \\
\textbf{(LCK)} \quad & i_f(t) = i_R(t) = i_L(t) \\
\textbf{(Resistencia)} \quad & v_R(t) = R\, i_R(t) \\
\textbf{(Inductancia)} \quad & v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}
\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación diferencial que se obtiene para corriente $i_L(t)$ es:

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + R\, i_L(t) = V_f$$

Como vimos en clase la solución de esta ecuación es de la forma:

$$i_L(t) = I_\infty + (I_o - I_\infty)e^{-\frac{R}{L}t} \quad ; \forall t > 0$$

en que la corriente inicial es $I_o = 0$ y la corriente en estado estacionario es $I_\infty = V_f/R$ (haciendo cero la derivada en la ec. diferencial o, equivalentemente considerando la inductancia como un corto-circuito). Por tanto

$$i_L(t) = V_f/R(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad ; \forall t > 0$$

Del gráfico de la corriente tenemos entonces que, cuando $t \to \infty$, entonces $i_L = V_f/R = 5$ [A].

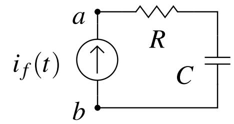
La constante de tiempo $\tau = L/R$[s] puede estimarse, por ejemplo, con el criterio del 63 %: $i_L(\tau) = 0{,}63 \times I_\infty = 0{,}63 \times 5 \approx 3$ [A], lo cual sucede en $\tau \approx 0{,}003 \approx L/R$ [s].

El voltaje en la inductancia es:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = V_f e^{-\frac{R}{L}t} \quad ; \forall t > 0$$

Por tanto, a partir del gráfico de voltaje tenemos que, en $t = 0$, $v_L(0) = V_f = 2$ [V] Lo cual implica $R = 2/5 = 0{,}4$ [Ω] y $L \approx 0{,}003 \times 0{,}4 = 1{,}2$ [mH]

Problema 2.3 (10 puntos) *En el circuito de la figura $R = 3$ [Ω], $C = 2$[F] y la fuente de corriente independiente entrega $i_f(t) = 5(\mu(t) - \mu(t-1))$. Grafique el voltaje ente los vértices a y b, es decir, $v_{ab}(t)$.*

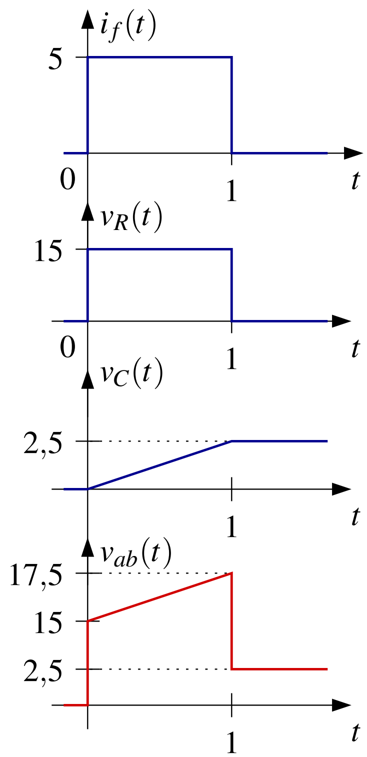


Solución

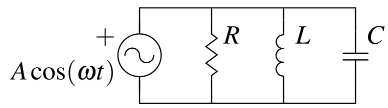
Note que, aplicando LVK, LCK y leyes de componentes, tenemos que

$$\begin{aligned} v_{ab}(t) &= v_R(t) + v_C(t) \\ &= R\, i_f(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_f(\tau)d\tau \\ &= 15\,(\mu(t) - \mu(t-1)) + 2{,}5(r(t) - r(t-1)) \end{aligned}$$

Para obtener el gráfico de $v_{ab}(t)$ podemos construir cada uno de los voltajes y luego sumarlos de manera gráfica:



Problema 2.4 (10 puntos) *Determine la potencia promedio absorbida por cada una de las componentes R, L y C en el circuito de la figura.*



Solución

La fuente de voltaje fija la tensión $v(t) = A\cos(\omega t)$ en cada una de las componentes, por ende, se pueden calcular las respectivas corrientes:

$$\begin{aligned}
&\textbf{(Resistencia)} \quad i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{A}{R}\cos(\omega t) \\
&\textbf{(Inductancia)} \quad i_L(t) = \frac{1}{L}\int v(\tau)d\tau = \frac{A}{\omega L}\sin(\omega t) \\
&\textbf{(Condensador)} \quad i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = -A\,\omega C\,\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Las respectivas potencias instantáneas son entonces:

$$\begin{aligned}
&\textbf{(Resistencia)} \quad p_R(t) = v(t)i_R(t) = \frac{A^2}{R}\cos^2(\omega t) = \frac{A^2}{2R}\left[1+\cos(2\omega t)\right] \\
&\textbf{(Inductancia)} \quad p_L(t) = v(t)i_L(t) = \frac{A^2}{\omega L}\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{A^2}{2\omega L}\sin(2\omega t) \\
&\textbf{(Condensador)} \quad p_C(t) = v(t)i_C(t) = -A^2\,\omega C\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{-A^2\,\omega C}{2}\sin(2\omega t)
\end{aligned}$$

Finalmente, la potencia promedio absorbida por cada componente puede obtenerse directamente observando que las sinusoides tienen valor medio igual a cero:

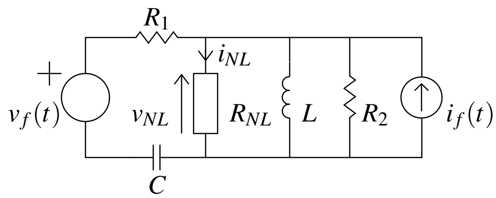
$$\begin{aligned}
&\textbf{(Resistencia)} \quad \bar{p}_R = \frac{A^2}{2R} \\
&\textbf{(Inductancia)} \quad \bar{p}_L = 0 \\
&\textbf{(Condensador)} \quad \bar{p}_C = 0
\end{aligned}$$

Note que, dado que la inductancia y el condensador sólo almacenan energía (que luego entregan de vuelta), se podría haber anticipado el resultado $\bar{p}_L = \bar{p}_C = 0$ y sólo calcular la potencia promedio absorbida por la resistencia.

Problema 2.5 (10 puntos) *En el circuito de la figura R_{NL} es una componente no lineal tal que $v_{NL} = f(i_{NL})$ para todo instante t, en que $f(\cdot)$ es una función invertible y tal que $f(0) = 0$.*

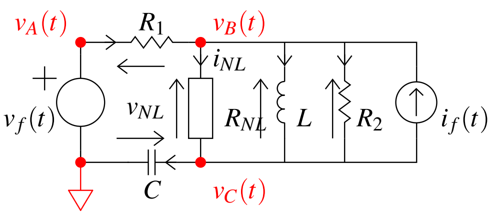
(a) Mediante el método de voltaje de nodos o de corrientes de malla, determine un sistema de ecuaciones que permita resolver el red.

(b) Si $i_f(t) = I_f$ y $v_f(t) = V_f$ son fuentes constante determine, suponiendo que se alcanza el estado estacionario, la potencia absorbida por la componente R_{NL}.



Solución

(a) La red tiene $v = 4$ nodos y $e - v + 1 = 4$ mallas, por tanto el método de voltaje de nodos entrege un sistema de ecuaciones de menor dimensión. (También puede usarse el método de mallas.) Consideramos los voltajes de nodo v_A, v_B y v_C como en la figura:



De inmediato apreciamos que la elección permite obtener $\boxed{v_A(t) = v_f(t)}$. Por ende, no es necesario plantear LCK en el nodo A. En los otros nodos tenemos:

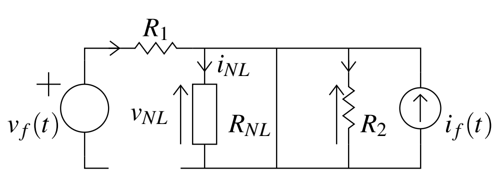
$$\begin{aligned} &\text{(LCK en nodo B)} \quad i_{R1} - i_{NL} - i_L - i_{R2} + i_f = 0 \\ &\text{(LCK en nodo C)} \quad i_C - i_{NL} - i_L - i_{R2} + i_f = 0 \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de 3er postulado:

$$\begin{aligned} \frac{v_A - v_B}{R_1} - f^{-1}(v_B - v_C) - \frac{1}{L}\int (v_B - v_C)dt - \frac{v_B - v_C}{R_2} + i_f = 0 \\ C\frac{dv_C}{dt} - f^{-1}(v_B - v_C) - \frac{1}{L}\int (v_B - v_C)dt - \frac{v_B - v_C}{R_2} + i_f = 0 \end{aligned}$$

Con lo que hemos obtenido 3 ecuaciones para los 3 voltajes de nodo.

(b) Si las fuentes de corriente y voltaje son constantes, en estado estacionario todas las corrientes y voltaje son constantes. Por ende, el voltaje en la inductancia es igual a cero y ésta puede ser considerada como un cortocircuito. Asimismo, la corriente por el condensador el igual a cero y éste puede ser considerado como un circuito abierto. Por tanto, en estado estacionario, podemos analizar la siguiente red:

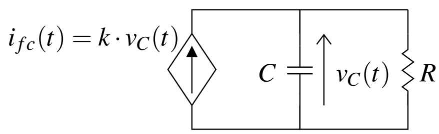


De inmediato notamos que el voltaje entre los terminales de la componente R_{NL} es $v_{NL} = 0$, por tanto la potencia absorbida será también igual a cero. Note también que la corriente será $i_{NL} = f^{-1}(0) = 0$.

Problema 2.6 (10 puntos) *En el circuito de la figura, la fuente de corriente es controlada $i_{fc}(t) = k \cdot v_C(t)$ y la condición inicial es $v_C(0) = V_o$.*

(a) Determine una ecuación diferencial para el voltaje en el condensador.

(b) Grafique cualitativamente cómo se comporta el voltaje en el condensador cuando $k < \frac{1}{R}$ y cuando $k > \frac{1}{R}$.



Solución

(a) Por LCK y usando la ecuación de 3er postulado que caracteriza al condensador, tenemos que:

$$i_{fc}(t) = i_C(t) + i_R(t)$$
$$k \cdot v_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R}$$

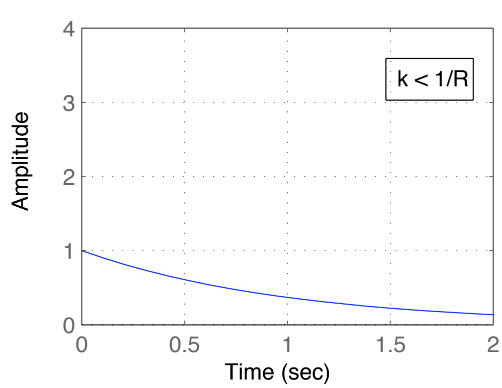
(b) Para obtener el gráfico del voltaje podemos resolver la ecuación diferencial anterior, por ejemplo, separando variables:

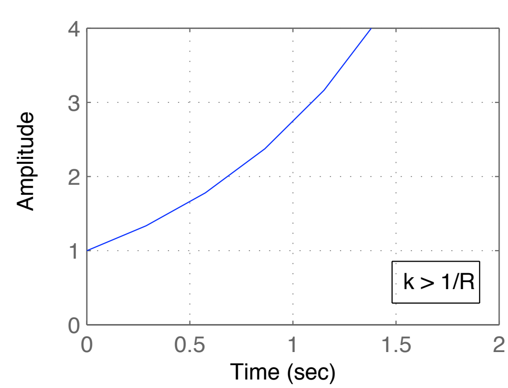
$$\frac{(k-\frac{1}{R})}{C}dt = \frac{dv_C}{v_C} \qquad \Big/ \int(\cdot)$$
$$\frac{(k-\frac{1}{R})}{C}t + \text{constante} = \ln(v_C) \qquad \Big/ e^{(\cdot)}$$
$$(\text{constante}) \cdot e^{\frac{(k-\frac{1}{R})}{C}t} = v_c(t)$$

en que la constante está dada por la condición inicial $v_C(0) = V_o$, por tanto

$$v_c(t) = V_o \cdot e^{\frac{(k-\frac{1}{R})}{C}t}$$

Esto corresponde a una exponencial creciente o decreciente dependiendo si $k > \frac{1}{R}$ o $k < \frac{1}{R}$, respectivamente, como se muestra cualitativamente en la figura:

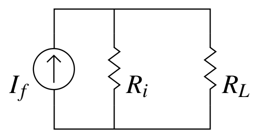




Problema 2.7 (10 puntos) *En el circuito de la figura, la fuente de corriente I_f es constante.*

(a) Determine la potencia absorbida por la resistencia R_L.

(b) ¿ Para qué valor de R_L la potencia absorbida por dicha resistencia es máxima ?



Solución

(a) El circuito es un divisor de corrientes, por tanto, la corriente por R_L puede obtenerse directamente:

$$i_{RL} = I_f \frac{R_i}{R_i + R_L}$$

La potencia absorbida es por tanto:

$$p_{RL} = (i_{RL})^2 \cdot R_L = \frac{(I_f R_i)^2 R_L}{(R_i + R_L)^2}$$

(b) Para obtener el valor de R_L que hace que la potencia absorbida sea máxima, derivamos la potencia con respecto a R_L e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p_{RL}}{dR_L} &= (I_f R_i)^2 \frac{(R_i + R_L)^2 - R_L \cdot 2(R_i + R_L)}{(R_i + R_L)^4} \\
&= (I_f R_i)^2 \frac{(R_i + R_L) - 2R_L}{(R_i + R_L)^3} \\
&= (I_f R_i)^2 \frac{R_i - R_L}{(R_i + R_L)^3} = 0
\end{aligned}$$

Donde se obtiene la condición $R_i = R_L$. Esto se conoce como el Teorema de Máxima Potencia Transferida.