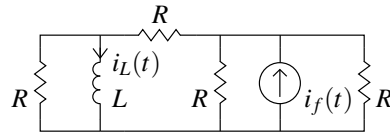


ELO102 – Teoría de Redes I

Tercer Certamen y soluciones – 1er. Semestre 2009

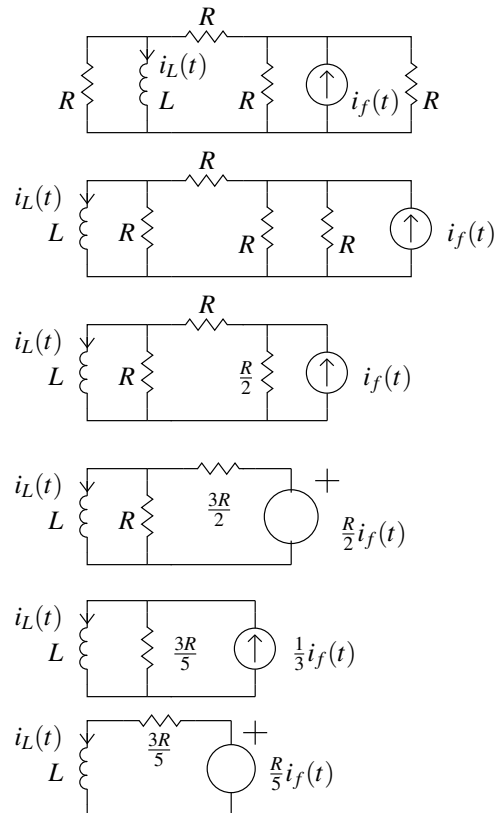
Sin formularios, sin libros, sin apuntes, sin calculadora y sin cualquier tipo de dispositivo electrónico. No hay preguntas durante el certamen. Todo desarrollo debe estar fundamentado.

Problema 3.1 (10 puntos) En el circuito de la figura, determine una ecuación diferencial que permita obtener la corriente por la inductancia L .



Solución

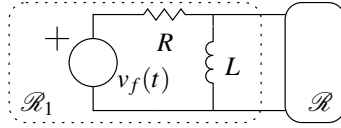
Antes de plantear cualquier ecuación para la corriente por la inductancia, es posible reemplazar sucesivamente el resto de la red por redes equivalente más simples:



Haciendo LKV en la malla resultante se obtiene la ecuación diferencial:

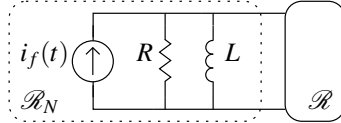
$$L \frac{di_L}{dt} + \frac{3R}{5} i_L = \frac{R}{5} i_f$$

Problema 3.2 (10 puntos) En el circuito de la figura, determine el equivalente Thévenin o Norton (SOLO UNO DE ELLOS) de la red $\mathcal{R}_1$, en estado estacionario, cuando $R = 4[\Omega]$, $L = 3[H]$ y $v_f(t) = 5 + \cos(t)$.



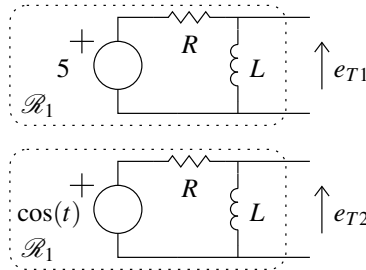
Solución

El equivalente Norton puede obtenerse directamente al aplicar el teorema de transformación de fuentes: la resistencia en serie con la fuente de tensión se puede transformar a una fuente de corriente en paralelo con una resistencia:



en que $i_f = v_f/R = (5 + \cos(t))/4$, $R = 4$ y $L = 3$

Para el equivalente Thévenin obtenemos primero el voltaje de circuito abierto de la red $\mathcal{R}_1$. La fuente de tensión tiene un parte continua y otra alterna, por tanto debe aplicarse superposición:



A frecuencia cero, la inductancia en estado estacionario equivale a un corto-circuito, por tanto $e_{T1} = 0$.

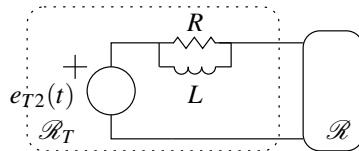
El voltaje e_{T2} puede obtenerse mediante un divisor de tensión en el dominio de los fasores:

$$E_{T2} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} V_f = \frac{j3}{4 + j3} 1 \angle 0 = \frac{3}{5} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \right)$$

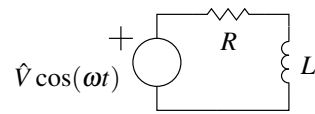
$$e_{T2}(t) = \frac{3}{5} \cos\left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

El voltaje Thévenin es entonces $e_T(t) = e_{T1} + e_{T2}(t) = e_{T2}(t)$.

La red relajada $\mathcal{R}_r$ se obtiene apagando la fuente (independiente) de voltaje en la red $\mathcal{R}_1$, quedando sólo la resistencia R en paralelo con la inductancia L . El equivalente Thévenin es, por tanto:

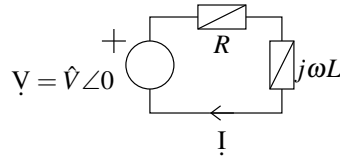


Problema 3.3 (10 puntos) En el circuito de la figura, se afirma que la potencia activa entregada por la fuente **aumenta** ya sea aumentando la amplitud del voltaje $\hat{V}$ o bien aumentando la frecuencia ω . Demuestre o refute la afirmación fundamentando claramente su respuesta.



Solución

La potencia activa es la parte real de la potencia compleja aparente. Esta última se obtiene calculando la transformada fasorial de la corriente que circula por la red:



$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{\hat{V} \angle 0}{R + j\omega L}$$

La potencia aparente compleja es entonces

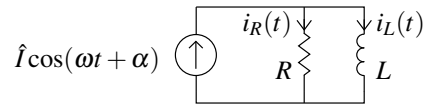
$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{\dot{V}\dot{I}^*}{2} = \frac{\hat{V} \angle 0}{2} \left(\frac{\hat{V}}{R + j\omega L} \right)^* \\ &= \frac{\hat{V}^2}{2(R - j\omega L)} \\ &= \frac{\hat{V}^2}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} (R + j\omega L) \end{aligned}$$

La potencia activa es entonces:

$$P_{ac} = \Re\{\dot{P}\} = \frac{\hat{V}^2 R}{2(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

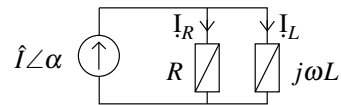
Por tanto, la potencia activa **aumenta** al aumentar el voltaje $\hat{V}$, pero **disminuye** al aumentar la frecuencia ω . La afirmación es por tanto falsa

Problema 3.4 (10 puntos) En el circuito de la figura, determine para qué valor de la frecuencia ω la corriente por la inductancia, $i_L(t)$, y la corriente por la resistencia, $i_R(t)$, tienen **la misma amplitud** en estado estacionario.



Solución

Las corrientes estacionarias por la resistencia y la inductancia pueden obtenerse mediante análisis fasorial:



En el dominio fasorial tenemos un divisor de corrientes. Por tanto,

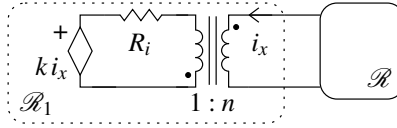
$$\mathbf{I}_R = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \hat{I} \angle \alpha \quad \mathbf{I}_L = \frac{R}{R + j\omega L} \hat{I} \angle \alpha$$

Notamos que las amplitudes de las corrientes (en el tiempo) serán iguales si y solo si la magnitud de sus transformadas fasoriales son iguales. Es decir, si y solo si

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}_R| &= |\mathbf{I}_L| \\ \frac{\omega L \hat{I}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} &= \frac{R \hat{I}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \\ \omega L &= R \end{aligned}$$

Es decir, las amplitudes son iguales si $\omega = R/L$.

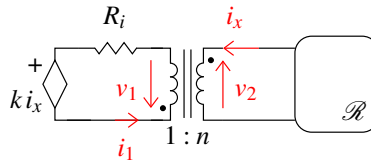
Problema 3.5 (10 puntos) En el circuito de la figura, determine el equivalente Thévenin o Norton (SOLO UNO DE ELLOS) de la red $\mathcal{R}_1$. Considere que para la fuente controlada $k = 3$, la resistencia $R_i = 1[\Omega]$ y la relación de vueltas del transformador ideal es $n = 10$.



Solución

La red $\mathcal{R}_1$ no posee fuentes independientes ni componentes que almacenen energía (pues el transformador es ideal). Esto implica que la fuente de voltaje Thévenin o la fuente de corriente Norton son iguales a cero.

Para encontrar la red relajada más simple $\mathcal{R}_r$ buscamos la característica terminal de la red $\mathcal{R}_1$. Si definimos los voltajes y corrientes como en la figura



entonces, el transformador ideal establece las siguientes relaciones:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n} \quad \frac{i_1}{i_x} = -n$$

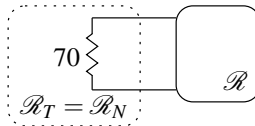
En tanto que, haciendo LK en la red conectada al primario del transformador, se obtiene

$$k i_x + R_i i_1 + v_1 = 0$$

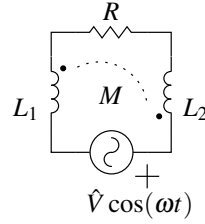
Reemplazando en esta ecuación las relaciones dadas por el transformador ideal, se obtiene la característica terminal dada por la relación entre i_x y v_2 :

$$k i_x + R_i (-n i_x) + \frac{v_2}{n} = 0 \Rightarrow v_2 = (n R_i - k) n i_x = 70 i_x$$

Es decir, el equivalente Thévenin o Norton es una resistencia de $70[\Omega]$:

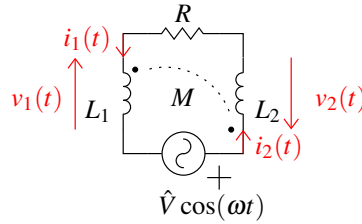


Problema 3.6 (10 puntos) En el circuito de la figura, determine la corriente por la resistencia R en estado estacionario.



Solución

Definiendo las corrientes y voltajes como en la figura



Notamos que, por LCK, $i_1 = i_2 = i$. Por tanto, para las inductancias acopladas magnéticamente, tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = (L_1 + M) \frac{di}{dt} \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = (M + L_2) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

Haciendo LVK en la única malla

$$v_1 + Ri + v_2 = \hat{V} \cos(\omega t)$$

Reemplazando las expresiones para los voltajes se tiene que:

$$(L_1 + 2M + L_2) \frac{di}{dt} + Ri = \hat{V} \cos(\omega t)$$

La corriente estacionaria se puede obtener aplicando transformada fasorial:

$$\begin{aligned} (j\omega L_{eq} + R)\dot{I} &= \hat{V} \angle 0 \\ \dot{I} &= \frac{\hat{V}}{R + j\omega L_{eq}} \end{aligned}$$

en que $L_{eq} = L_1 + 2M + L_2$. Finalmente aplicando transformada fasorial inversa, se obtiene la corriente estacionaria

$$i(t) = \frac{\hat{V}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L_{eq}^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L_{eq}}{R}\right)\right)$$