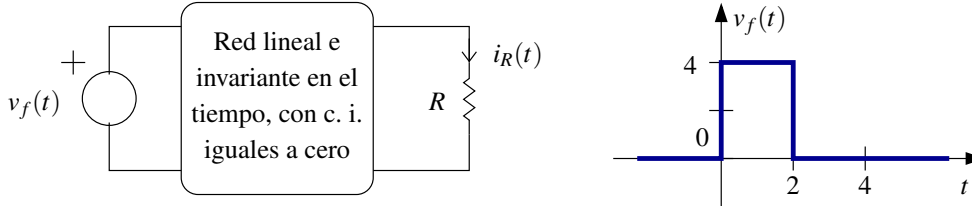


ELO102 – Teoría de Redes I – Semestre 1, 2009

Certamen para rezagados

Problema 4.1 (10 puntos) La red de la figura es lineal e invariante en el tiempo con condiciones iniciales iguales a cero. La única excitación es la fuente de voltaje $v_f(t)$. Se sabe que la corriente por la resistencia cuando $v_f(t) = \delta(t)$ (un impulso unitario) es igual a $i_R(t) = 3e^{-4t}\mu(t)$. Determine y grafique aproximadamente la corriente por la resistencia cuando $v_f(t)$ es la señal de la figura derecha.



Solución

Si la red es lineal e invariante en el tiempo y $v_f(t)$ es la única excitación, entonces

$$i_R(t) = T\langle x_o, v_f(t) \rangle$$

en que $T\langle \rangle$ es un operador lineal y x_o representa las condiciones iniciales de la red. Se sabe que

$$T\langle 0, \delta(t) \rangle = 3e^{-4t}\mu(t)$$

La excitación de la figura puede escribirse en términos de escalones

$$v_f(t) = 4\mu(t) - 4\mu(t-2)$$

Por linealidad e invarianza en el tiempo tenemos que

$$T\langle 0, 4\mu(t) - 4\mu(t-2) \rangle = 4T\langle 0, \mu(t) \rangle - 4T\langle 0, \mu(t-2) \rangle$$

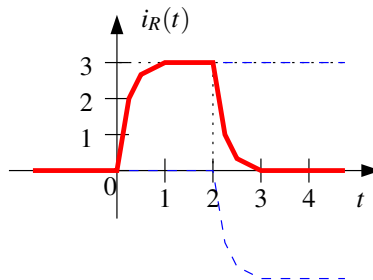
La respuesta a cada escalón puede obtenerse (también por linealidad e invarianza) a partir de la respuesta a impulso:

$$\begin{aligned} T\langle 0, \mu(t) \rangle &= T\left\langle 0, \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \right\rangle = \int_{-\infty}^t T\langle 0, \delta(\tau) \rangle d\tau = \int_{-\infty}^t 3e^{-4\tau}\mu(\tau) d\tau \\ &= \frac{3}{4}(1 - e^{-4t})\mu(t) \end{aligned}$$

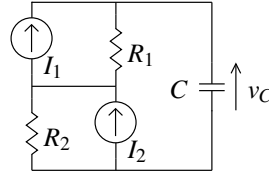
Por tanto la corriente por la resistencia cuando $v_f(t)$ es como en la figura derecha es:

$$i_R(t) = 3(1 - e^{-4t})\mu(t) - 3(1 - e^{-4(t-2)})\mu(t-2)$$

El gráfico cualitativo de la corriente se puede obtener apreciando que la constante de tiempo de la exponencia es $\tau = 1/4$. Por lo tanto, el valor final de cada respuesta a escalón se alcanza después de 1[seg]:

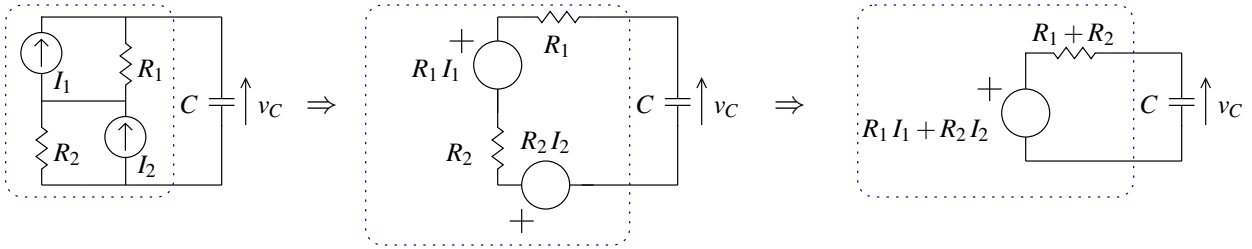


Problema 4.2 En el circuito de la figura, determine el voltaje en condensador $v_C(t)$ para $t > 0$, suponiendo que éste se encuentra inicialmente descargado y las fuentes de corriente son constantes y se activan en $t = 0$.



Solución

Antes de obtener el voltaje en el condensador, es posible reemplazar el resto de la red por redes equivalentes más simples, usando transformación de fuentes, conmutatividad serie y combinación de componentes de igual tipo:



En la red equivalente más simple se pueden las siguientes ecuaciones

$$v_R(t) + v_C(t) = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

$$v_R(t) = (R_1 + R_2)i(t)$$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t)$$

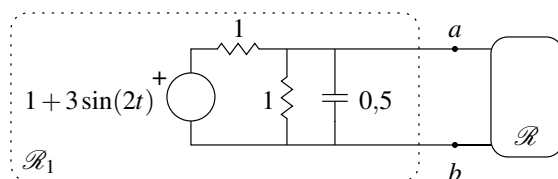
Combinando las ecuaciones se obtiene la ecuación diferencial para el voltaje en el condensador:

$$(R_1 + R_2)C \frac{d}{dt} v_C(t) + v_C(t) = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

con condición inicial $v_C(0) = 0$. La solución de esta ecuación diferencial es la ecuación de carga de un condensador en un circuito RC. Es de la forma:

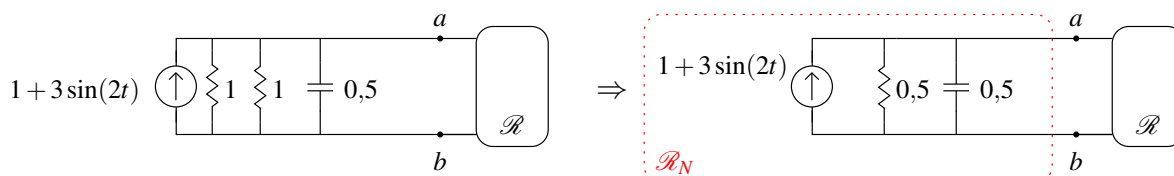
$$\begin{aligned} v_C(t) &= V_\infty + (V_o - V_\infty)e^{-t/\tau} \\ &= (R_1 I_1 + R_2 I_2) \left(1 - e^{-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}} \right) \end{aligned}$$

Problema 4.3 (10 puntos) En la red de la figura, determine el equivalente Thévenin o Norton (SOLO UNO DE ELLOS) de la red $\mathcal{R}_1$ desde los terminales $a - b$, en estado estacionario.

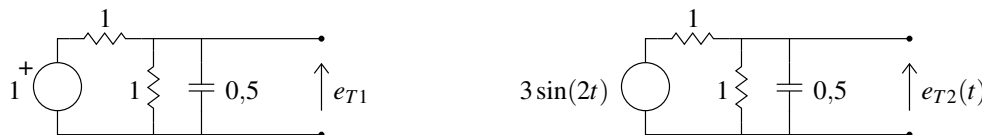


Solución

El equivalente Norton se puede obtener directamente aplicando transformación de fuentes:



Para obtener el equivalente Thévenin, en primer lugar calculamos la fuente Thévenin. La fuente de voltaje tiene una parte continua y otra sinusoidal, por ende para obtener el voltaje de circuito abierto se debe aplicar **superposición**:



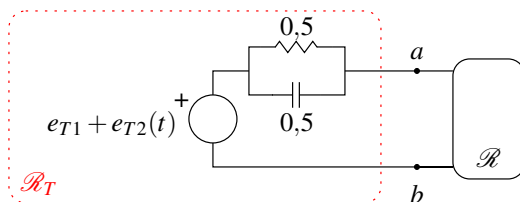
El voltaje continuo en estado estacionario corresponde al voltaje en el condensador cuando este se carga y actúa como circuito abierto. Por ende, el voltaje está dado por el divisor de tensiones formado por las resistencias: $e_{T1} = 0,5$.

El voltaje sinusoidal en estado estacionario se puede obtener mediante análisis fasorial. Al reemplazar por impedancias equivalentes, también se forma un divisor de tensiones:

$$E_{T2} = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_f = \frac{\frac{R}{1+j\omega RC}}{R + \frac{R}{1+j\omega RC}} V_f = \frac{R}{2R + j\omega RC} V_f = \frac{(-3j)}{2+j} = \frac{3}{\sqrt{5}} \angle(-\frac{\pi}{2} - \arctan(1/2))$$

$$e_{T2}(t) = \frac{3}{\sqrt{5}} \cos(2t - \frac{\pi}{2} - \arctan(1/2)) = \frac{3}{\sqrt{5}} \sin(2t - \arctan(1/2))$$

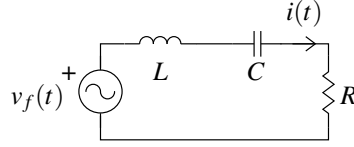
La red relajada más simple $\mathcal{R}_r$ se obtiene apagando las fuentes independientes y haciendo todas las condiciones iniciales iguales a cero. Esto permite combinar las resistencias que quedan en paralelo. De esta forma, se obtiene el equivalente Thévenin:



Problema 4.4 (10 puntos) Para la red de la figura, la fuente de voltaje es $v_f(t) = \hat{V} \cos(\omega t)$

(a) Determine la corriente $i(t)$ en estado estacionario,

(b) Determine la frecuencia $\omega = \omega_{\min}$ tal que la potencia reactiva entregada por la fuente es **mínima**.



Solución

(a) Para determinar la corriente $i(t)$ en estado estacionario, usamos transformadas fasoriales e impedancias equivalentes:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_f}{\dot{Z}_{eq}}$$

en que la impedancia equivalente $\dot{Z}_{eq}$ es la combinación en serie de las impedancias asociadas a la inductancia, condensador y resistencia:

$$\dot{Z}_{eq} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R = \frac{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC}{j\omega C} = \frac{\omega RC - j(1 - \omega^2 LC)}{\omega C}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{V}_f}{\dot{Z}_{eq}} = \hat{V} \angle 0 \frac{\omega C}{\omega RC + j(-1 + \omega^2 LC)} \\ \Rightarrow i(t) &= \frac{\hat{V} \omega C}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\frac{-1 + \omega^2 LC}{\omega RC})) \end{aligned}$$

(b) La potencia reactiva es la parte imaginaria de la potencia compleja aparente:

$$P = \frac{\dot{V} \dot{I}^*}{2} = \frac{\hat{V}}{2} \left[\frac{\hat{V} \omega C}{\omega RC + j(-1 + \omega^2 LC)} \right]^* = \frac{\hat{V}^2 \omega C (\omega RC + j(-1 + \omega^2 LC))}{(\omega RC)^2 + (-1 + \omega^2 LC)^2}$$

Por lo tanto, la potencia reactiva es

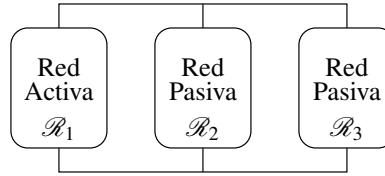
$$Q = \frac{\hat{V}^2 \omega C (-1 + \omega^2 LC)}{(\omega RC)^2 + (-1 + \omega^2 LC)^2}$$

De la expresión obtenida se aprecia que la potencia reactiva alcanza su mínimo cuando $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ en que $Q = 0$.

El mismo resultado se obtiene haciendo el ángulo de la impedancia igual a cero, en cuyo caso la potencia reactiva será cero:

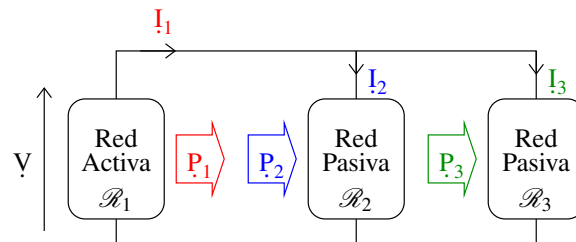
$$\arctan(\frac{-1 + \omega^2 LC}{\omega RC}) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Problema 4.5 (10 puntos) En la red de la figura, se muestra la interconexión de tres redes. $\mathcal{R}_1$ es una red activa (con fuentes), mientras $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$ son redes pasivas (sin fuentes de corriente o voltaje). Se sabe que la potencia absorbida por la red $\mathcal{R}_2$ es 10[VA] con factor de potencia 0,8 inductivo, mientras que la red $\mathcal{R}_3$ absorbe 5[VA] con factor de potencia 0,6 capacitivo. Determine la potencia activa entregada por la red $\mathcal{R}_1$ y el factor de potencia asociado.



Solución

Por la conexión paralelo, las tres redes tienen el mismo voltaje V entre sus terminales.



Por LCK, tenemos que $I_1 = I_2 + I_3$, por tanto

$$P_1 = \frac{VI_1}{2} = \frac{V}{2}(I_2 + I_3) = P_2 + P_3$$

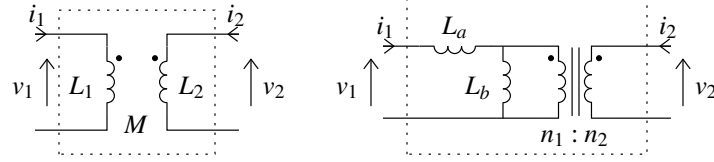
Sabemos que

$$\begin{aligned} |P_2| = 10, \quad \cos(\angle P_2) = 0,8, \quad \angle P_2 > 0 \quad (\text{F.P. inductivo}) &\Rightarrow P_2 = 8 + 6j \\ |P_3| = 5, \quad \cos(\angle P_3) = 0,6, \quad \angle P_3 < 0 \quad (\text{F.P. capacitivo}) &\Rightarrow P_3 = 3 - 4j \end{aligned}$$

Por tanto, la potencia aparente compleja entregada por $\mathcal{R}_1$ es

$$P_1 = 11 + 2j \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{ac} = 11[W] \text{ (potencia activa)} \\ \cos \phi = \frac{11}{\sqrt{121+4}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} \text{ (F.P. inductivo)} \end{array} \right.$$

Problema 4.6 (10 puntos) Determine la relación entre los valores de $\{L_1, L_2, M\}$ y los valores de $\{L_a, L_b, n = n_2/n_1\}$ para que ambos modelos de acoplamiento magnético sean equivalentes.

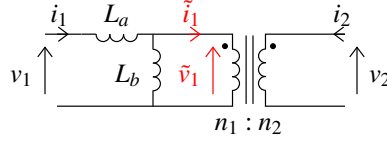


Solución

Las ecuaciones del modelo del lado izquierdo son las vistas en clases para inductancias acopladas magnéticamente:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

En el modelo derecho definimos primero las siguientes señales adicionales:



En el primario del transformador tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_a \frac{di_1}{dt} + \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_1 &= L_b \frac{d}{dt}(i_1 - \tilde{i}_1) \end{aligned}$$

Mientras que las ecuaciones del transformador ideal (respetando la convención de los puntos) son:

$$\frac{\tilde{v}_1}{v_2} = \frac{1}{n} \quad ; \quad \frac{\tilde{i}_1}{i_2} = -n$$

Usando las últimas 2 ecuaciones en la de $\tilde{v}_1$, se obtiene:

$$v_2 = nL_b \frac{di_1}{dt} + n^2 L_b \frac{di_2}{dt}$$

Finalmente, usando esta ecuación para reemplazar $\tilde{v}_1 = v_2/n$ en la ecuación de v_1 , se obtiene:

$$v_1 = (L_a + L_b) \frac{di_1}{dt} + nL_b \frac{di_2}{dt}$$

Por lo tanto, ambos modelos de acoplamiento son equivalente si y sólo si:

$$L_1 = L_a + L_b \quad L_2 = n^2 L_b \quad M = nL_b$$