TEORIA DE REDES I

Primer Certamen

TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN ESTAR JUSTIFICADAS

Cuando no sea posible calcular manualmente, deje sus resultados expresados en la forma más simple posible. UNIDADES EN S.I.

Problema 1.1 (10 pts). Un sistema está caracterizado por

$$r(t) = T\langle x(0), e(t)\rangle = 2e(t) - t\frac{de(t)}{dt} + 3x_o \tag{1}$$

, donde el estado inicial es $x(0) = x_o$.

Se afirma que este sistema es lineal e invariante en el tiempo. ¿Es una afirmación correcta (total o parcialmente)? Justifique cuidadosamente su respuesta.

Solución

Veamos primero si es invariante en t. Para ello aplicamos $e(t-\tau)$ donde τ es un corrimiento cualquiera. Además suponemos que $x(\tau) = x_o$. Así, resulta

$$T\langle x(\tau), e(t-\tau)\rangle = 2e(t-\tau) - t\frac{de(t-\tau)}{dt} + 3x_o; \qquad t \geq \tau \tag{2}$$

de ahí se aprecia que, debido al factor t que multiplica la derivada, la expresión NO corresponde a $r(t-\tau)$. En consecuencia, el sitema es VARIANTE EN EL TIEMPO:

Para analizar linealidad consideremos

$$e(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) \tag{3}$$

$$x(0) = \beta_1 x_{o1} + \beta_2 x_{o2} \tag{4}$$

donde α_1, α_2, β_1 y β_2 son constantes arbitrarias. Al reemplazar estas expresiones en la definición del sistema dada por (1), podemos apreciar que se cumplen todas las propiedades de los sistemas lineales En consecuencia, el sistema ES LINEAL.

Problema 1.2 (10 pts). Considere la señal $f(t)$ definida por

$$f(t) = 2\mu(t-1) + 3\delta(t-2) - 2\mu(t-3) - \mu(t-4) - \delta(t-5) + \mu(t-6) \tag{5}$$

1.2.1 Calcule el valor medio de la señal, en el intervalo $[0; 7]$

1.2.2 Determine la expresión para la integral de la señal $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,dt$, y construya su gráfico, también en el intervalo $[0; 7]$.

Solución

1.2.1 Debemos primero calcular el área encerrada en el intervalo especificado. Esto se puede hacer considerando la contribución de cada componente de la señal en el intervalo $[0; 7]$, sumando luego esas contribuciones (habida consideración del signo respectivo).

Componente	Área
$2\mu(t-1)$	12
$3\delta(t-2)$	3
$-2\mu(t-3)$	-8
$-\mu(t-4)$	-3
$-\delta(t-5)$	-1
$\mu(t-6)$	1
$f(t)$	4

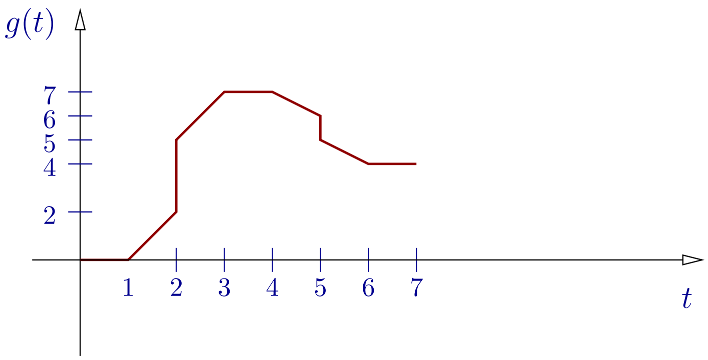
Luego el valor medio se calcula según la definición como

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{1}{7} \cdot 4 = \frac{4}{7} \tag{6}$$

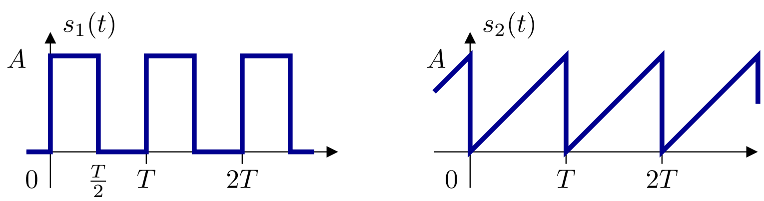
1.2.2 La integral $g(t)$ se puede obtener calculando la integral para cada componente de la señal, así

$$g(t) = 2r(t-1) + 3\mu(t-2) - 2r(t-3) - r(t-4) - \mu(t-5) + r(t-6) \tag{7}$$

Al construir el gráfico de $g(t)$ se obtiene



Problema 1.3 (10 puntos)**.** Considere las dos señales periódicas que se representan en la figura



1.3.1 Determine el valor medio de ambas señales.

1.3.2 Determine cuál de las señales tiene mayor valor efectivo (RMS)

Solución

Para una señal periódica $s(t)$, de periodo T, el valor medio y efectivo (eficaz o RMS) están dados por:

$$\bar{s} = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} s(t)dt \qquad s_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} s^2(t)dt}$$

1.3.1 Valores medios (pueden también obtenerse por simple inspección):

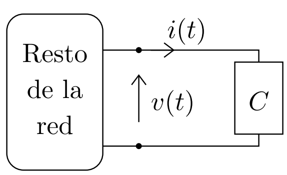
$$\bar{s}_1 = \frac{1}{T}\int_0^T s_1(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} Adt = \frac{A}{2}$$
$$\bar{s}_2 = \frac{1}{T}\int_0^T s_2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A\,t}{T}dt = \frac{1}{T}\frac{A\,T^2}{2T} = \frac{A}{2}$$

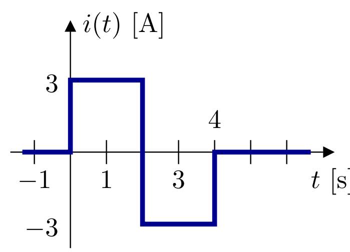
1.3.2 Valores efectivos (al cuadrado para omitir la raíz cuadrada):

$$(s_{1,RMS})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (s_1(t))^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} A^2 dt = \frac{A^2}{2}$$
$$(s_{2,RMS})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (s_2(t))^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{A\,t}{T}\right]^2 dt = \frac{1}{T}\frac{A^2\,T^3}{3T^2} = \frac{A^2}{3}$$

Por tanto es $s_1(t)$ la señal con mayor valor efectivo.

Problema 1.4 (10 puntos)**.** Considere la red eléctrica de la figura, en que $v(t) = 2\,i(t-1)$





1.4.1 Determine y grafique la potencia instantánea $p(t)$ absorbida por la componente C.

1.4.2 Determine, si es posible, el cambio neto de energía dentro de la componente C entre $t = 0$ y $t = 6$.

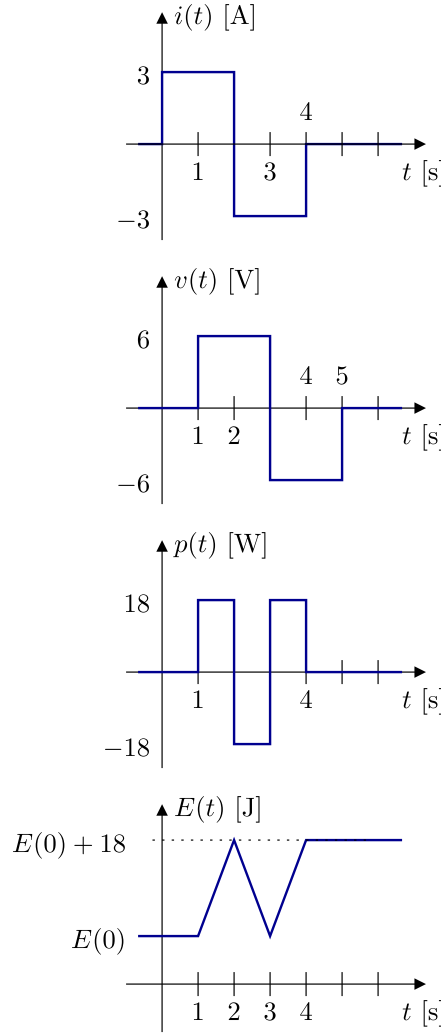
Solución

1.4.1 El voltaje se obtiene directamente a partir de la corriente

$$i(t) = 3\mu(t) - 6\mu(t-2) + 3\mu(t-4)$$
$$\Rightarrow \quad v(t) = 3\mu(t-1) - 6\mu(t-3) + 3\mu(t-5)$$

La potencia absorbida puede obtenerse a partir de las expresiones analíticas de corriente y voltaje (que están dadas en referencia combinada) o bien a partir de las gráficas:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)\,i(t) \\ &= 18\mu(t-1) - 36\mu(t-2) + 36\mu(t-3) - 18\mu(t-4) \end{aligned}$$



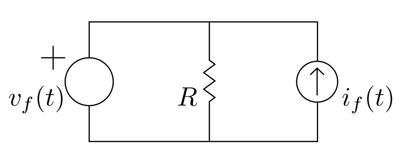
1.4.2 La energía dentro de la componente C depende de su energía inicial y de la potencia que dicha componente absorbe. Es decir,

$$p(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$
$$\Rightarrow \quad E(t) = E(0) + \int_0^t p(\tau)d\tau$$

Dicha integral se puede obtener a partir de las expresiones analíticas o bien a partir de la gráfica de la potencia absorbida.

$$E(6) - E(0) = \int_0^6 p(\tau)d\tau = 18[\mathrm{J}]$$

Problema 1.5 (10 puntos). Considere la red eléctrica de la figura, en que $v_f(t) = \cos(\omega t)$ e $i_f(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$.

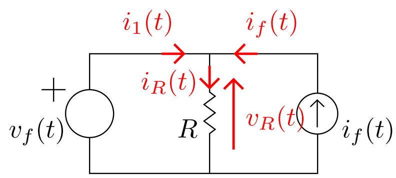


1.5.1 Determine la corriente que atraviesa la resistencia R.

1.5.2 Determine, si existen, los valores de A y α tales que potencia instantánea entregada por la fuente de voltaje sea cero.

Solución

1.5.1 Definiendo variables como en la figura



- Por LCK: $\quad i_1(t) - i_R(t) + i_f(t) = 0$
- Por LVK: $\quad v_f(t) - v_R(t) = 0$
- Por ley de Ohm: $\quad v_R(t) = R\, i_R(t)$

Por tanto,

$$i_R(t) = \frac{v_f(t)}{R} = \frac{1}{R}\cos(\omega t)$$

1.5.2 La potencia instantánea entregada por la fuente de voltaje es

$$p(t) = v_f(t) i_1(t)$$

Por tanto,

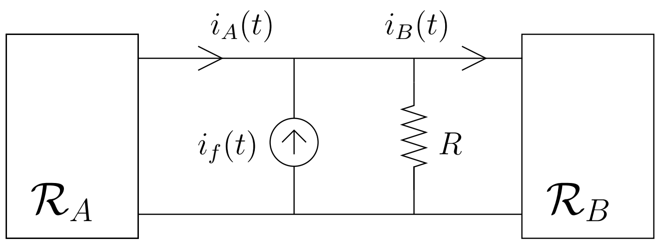
$$p(t) = 0 \quad \iff \quad i_1(t) = 0$$

Es decir,

$$i_1(t) = i_R(t) - i_f(t) = \frac{1}{R}\cos(\omega t) - A\cos(\omega t + \alpha) = 0 \quad \forall t$$

Lo cual se cumple si y solo si $A = 1/R$ y $\alpha = 0$.

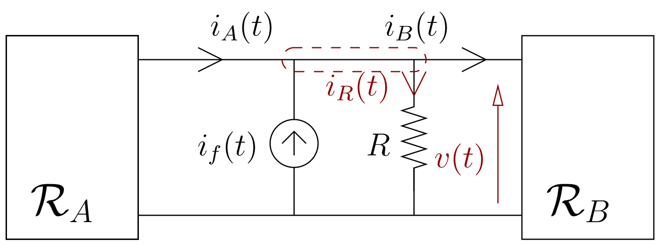
Problema 1.6 (10 pts). En la red de la figura, **todas las corrientes son constantes para todo $\mathbf{t \geq 0}$**, y se sabe además que $i_f(t) = 2$ $[A]$, $i_A(t) = 5$ $[A]$, $i_B(t) = 3$ $[A]$ y $R = 4$ $[\Omega]$.



Calcule la potencia recibida o entregada individualmente por la red $\mathcal{R}_A$ y por la red $\mathcal{R}_B$. Especifique para cada una de las redes si se trata de potencia entregada o recibida.

Solución

Considere la figura



Aplicando LCK (en la superficie cerrada indicada con línea punteada) se obtiene $i_R(t) = 4$ $[A]$. Luego, por ley de Ohm, $v(t) = Ri_R(t) = 16$ $[V]$. Entonces la potencia entregada por la red $\mathcal{R}_A$ es $v(t)i_A(t) = 80$ $[W]$; en cambio, la red $\mathcal{R}_B$ recibe $v(t)i_B(t) = 48$ $[W]$.

MSB-JYE/080411