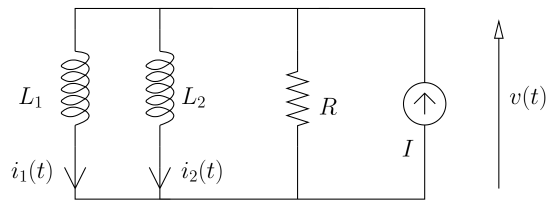
TEORIA DE REDES I

Solución Segundo Certamen

Problema 2.1 (20 puntos). Considere la red con dos inductores que se muestra en la figura, donde se conocen los valores de L_1, L_2, R, $i_1(0)$, $i_2(0)$ e I (corriente constante $\forall t \geq 0$)



2.1.1 [15 pts] Determine $v(t)$, $\forall t \geq 0$.

2.1.2 [5 pts] Si $I = 0$, pero las condiciones iniciales no son cero, ¿Se puede afirmar que toda la energía inicialmente almacenada en los inductores se disipará en la resistencia, cualesquiera sean las condiciones iniciales (siempre distintas de cero)?

Solución

2.1.1 Aplicando LCK y ley de Ohm, se llega a

$$i_1(t) + i_2(t) + \frac{v(t)}{R} = I \Longrightarrow \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt} = 0 \tag{1}$$

Luego, usando el Tercer Postulado para los inductores, se llega a

$$\frac{L_{eq}}{R}\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0 \tag{2}$$

donde $L_{eq} = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$. Finalmente, considerando que $v(0) = (I - i_1(0) - i_2(0))R$, se obtiene

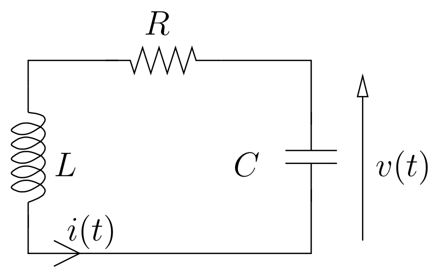
$$v(t) = v(0)e^{-tR/L_{eq}} \quad \forall t \geq 0 \tag{3}$$

2.1.2 Si toda la energía inicialmente almacenada en los inductores, se disipara en la resistencia, entonces ello significaría que $i_1(\infty) = i_2(\infty) = 0$. Lo que sí sabemos es que $v(\infty) = 0$ y por lo tanto $i_1(\infty) = -i_2(\infty)$. Por lo tanto, lo que debemos hacer es calcular los valores asintóticos para las corrientes en los inductores. Primero notamos, por el Tercer Postulado, que

$$i_1(t) = i_1(0) + \frac{1}{L_1}\int_0^t v(\lambda)d\lambda = i_1(0) + v(0)\frac{L_2}{(L_1 + L_2)R}(1 - e^{-tR/L_{eq}}) \tag{4}$$

En consecuencia, las corrientes en los inductores no tienden a cero (salvo en el caso especial cuando $L_2 i_2(0) - L_1 i_1(0) = 0$), y por lo tanto, hay una fracción de la energía inicial que NO se disipa en el resistor, sino que queda "dando vueltas" entre los dos inductores, lo que se expresa en una corriente constante $i_1(\infty) = -i_2(\infty) \neq 0$.
.

Problema 2.2 (30 puntos). Considere la red RLC de la figura.

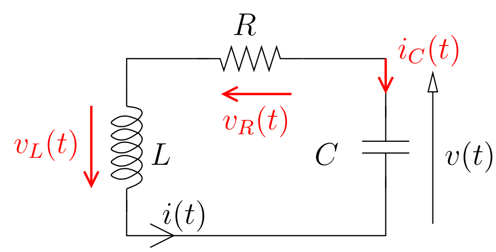


2.2.1 [15pts] Construya la ecuación diferencial que debe satisfacer $v(t)$

2.2.2 [10 pts] ¿Qué condiciones deberían satisfacer R, L y C para que $v(t) = 2e^{-3000t}\cos(4000t)$ $\forall t \geq 0$?

2.2.3 [5 pts] Si $L = 1$ $[H]$, ¿cuanta energía se disiparía en el resistor, en el lapso $[0, \infty]$?

Solución



2.2.1 Aplicando LVK en la única malla se obtiene

$$\begin{aligned}
v_L(t) + v_R(t) + v(t) &= 0 \\
L\frac{di_C(t)}{dt} + Ri_C(t) + v(t) &= 0 \\
LC\frac{dv^2(t)}{dt^2} + RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) &= 0
\end{aligned}$$

2.2.2 Consideramos el tiempo medido en [ms]. Entonces, a partir de $v(t) = 2e^{-3t}\cos(4t)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{dv(t)}{dt} &= -6e^{-3t}\cos(4t) - 8e^{-3t}\sin(4t) \\
\frac{d^2v(t)}{dt^2} &= 18e^{-3t}\cos(4t) + 24e^{-3t}\sin(4t) + 24e^{-3t}\sin(4t) - 32e^{-3t}\cos(4t)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 2e^{-3t}\cos(4t) \\
RC\frac{dv(t)}{dt} &= RC \cdot 2e^{-3t}\left[-3\cos(4t) - 4\sin(4t)\right] \\
LC\frac{d^2v(t)}{dt^2} &= LC \cdot 2e^{-3t}\left[-7\cos(4t) + 24\sin(4t)\right] \\
0 &= 2e^{-3t}\left[\{1 - 3RC - 7LC\}\cos(4t) + \{4RC - 24LC\}\sin(4t)\right]
\end{aligned}
$$

De donde se obtienen las condiciones

$$
\begin{aligned}
4C(R-6L) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R = 6L \\
1 - 3RC - 7LC = 0 \quad &\Rightarrow \quad 1 - 18LC - 7LC = 0 \quad \Rightarrow \quad LC = \tfrac{1}{25}
\end{aligned}
$$

Donde R está medido en $K\Omega$, C está medido en μF y L está medido en H.

2.2.3 Dado el valor de la inductancia $L = 1[H]$, usando las condiciones anteriores, tenemos que $R = 6[k\Omega]$ y $C = 0{,}04[\mu F]$ (pues el tiempo se consideró en [ms]).

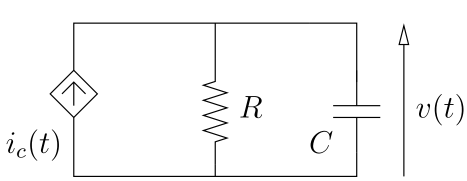
Para calcular la energía total disipada en la resistencia, basta obtener la energía inicial almacenada en el condensador y en el inductor. Para ello necesitamos las condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
v(0) &= 2e^{-3t}\cos(4t)\Big|_{t=0} = 2[V] \\
i_L(0) &= -i_C(0) = -C\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = -0{,}04\left[-6e^{-3t}\cos(4t) - 8e^{-3t}\sin(4t)\right]_{t=0} = 0{,}24[mA]
\end{aligned}
$$

Por tanto, la energía total disipada es

$$
\begin{aligned}
E = E_C(0) + E_L(0) &= \frac{1}{2}\left[Li_L^2(0) + Cv_c^2(0)\right] \\
&= \frac{(0{,}24)^2 + 0{,}04 \times 4^2}{2} = \frac{0{,}0576 + 0{,}64}{2} = \frac{0{,}6976}{2} = 0{,}3488[\mu J]
\end{aligned}
$$

Problema 2.3 (20 puntos). Considere la red con fuente controlada que se muestra en la figura, donde se suponen conocidos R, C, g y la condición inicial $v(0)$.



$i_c(t) = g \cdot v(t)$

2.3.1 [10 pts] Determine la ecuación diferencial que permite calcular $v(t)$ $\forall t \geq 0$.

2.3.2 [10 pts] Usando la ecuación diferencial construida, calcule y grafique $v(t)$, para dos casos: $g < R^{-1}$ y $g > R^{-1}$

Solución

2.3.1 Aplicando LCK se obtiene

$$i_c(t) = \frac{v(t)}{R} + C\frac{dv(t)}{dt} \tag{5}$$

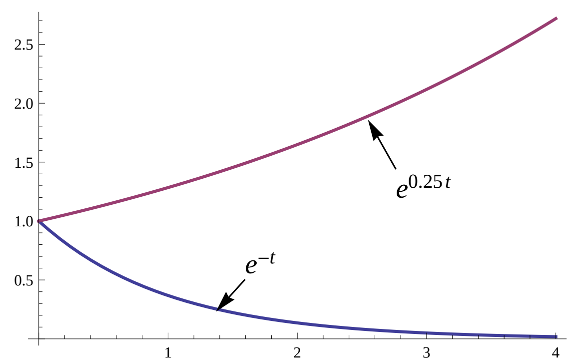
Usando el tercer Postulado de la fuente controlada se llega a

$$\frac{RC}{1-gR}\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0 \tag{6}$$

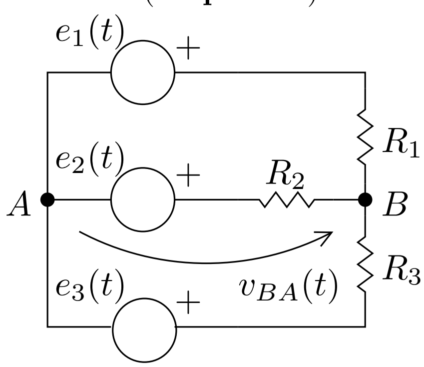
2.3.2 La solución general para la ecuación anterior es

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau} \qquad \text{con} \quad \tau = \frac{RC}{1-gR} \tag{7}$$

Entonces, si $g < R^{-1}$, se trata de una exponencial decreciente, que decae asintóticamente a cero. Por el contrario, si $g > R^{-1}$, entonces la tensión $v(t)$ crecería exponencialmente, sin límite (en teoría, claro). La figura ilustra ambos casos, cuando $v(0) = 1$.



Problema 2.4 (20 puntos). Considere la red de la figura

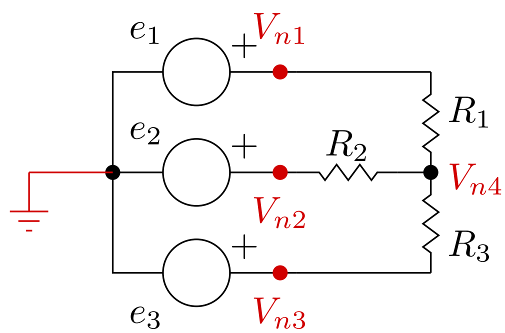


2.4.1 [10 pts]Determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar esa red.

2.4.2 [10 pts] Determine el voltaje $v_{BA}(t)$.

Solución

2.4.1 Para obtener un sistema de ecuaciones consistente, por ejemplo, es posible aplicar el método de nodos, eligiendo el nodo de referencia y los voltajes de nodo como en la figura:

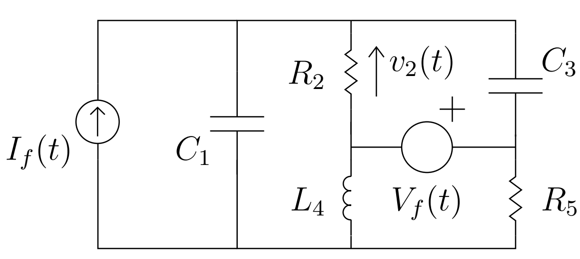


$$
\begin{aligned}
V_{n1} &= E_1 \\
V_{n2} &= E_2 \\
V_{n3} &= E_3 \\
\text{(LCK en nodo 4)} \quad 0 &= -\frac{1}{R_1}V_{n1} - \frac{1}{R_2}V_{n2} - \frac{1}{R_3}V_{n3} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_{n4}
\end{aligned}
$$

2.4.2 Del sistema de ecuaciones anterior se obtiene:

$$
V_{BA} = V_{n4} = \frac{\frac{1}{R_1}E_1 + \frac{1}{R_2}E_2 + \frac{1}{R_3}E_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}
$$

Problema 2.5 (30 puntos). Considere la red de la figura, en que $C_1 = 1[\mu F]$, $R_2 = 2[k\Omega]$, $C_3 = 3[\mu F]$, $L_4 = 4[mH]$, $R_5 = 5[k\Omega]$, el condensador y el inductor se encuentran descargados en $t = 0$, $I_f(t) = 5[mA]$ y $V_f(t) = 12[V]$, para todo $t \geq 0$.

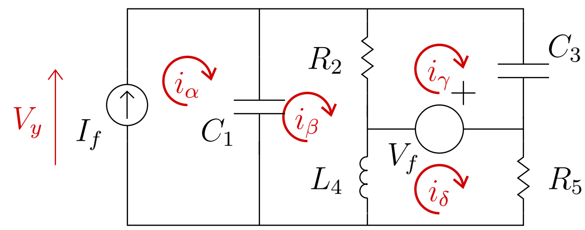


2.5.1 [20 pts.] Determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red y formúlelo en forma matricial. NO DEBE HACER TRANSFORMACIONES EQUIVALENTES. No se pide resolver el modelo matemático

2.5.2 [10 pts] Determine el voltaje $v_2(\infty)$.

Solución

2.5.1 Asignando un voltaje a la fuente de corriente, es posible usar la formulación directa del método de corrientes de malla:

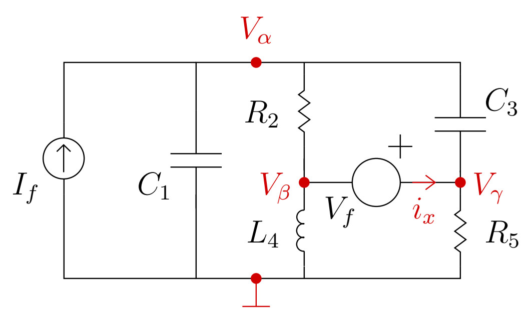


$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1}D^{-1} & -\frac{1}{C_1}D^{-1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1}D^{-1} & \frac{1}{C_1}D^{-1}+R_2+L_4D & -R_2 & -L_4D \\ 0 & -R_2 & R_2+\frac{1}{C_3}D^{-1} & 0 \\ 0 & -L_4D & 0 & L_4D+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \\ i_\delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_y(t) \\ 0 \\ -V_f(t) \\ V_f(t) \end{bmatrix}$$

En el sistema descrito por la ecuación matricial anterior hay que sincerar el hecho que el voltaje $V_y(t)$ **es una incógnita** y que la corriente en la malla α **es conocida**, es decir, $i_\alpha(t) = I_f(t)$. De esta forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1}D^{-1} & -\frac{1}{C_1}D^{-1} & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{C_1}D^{-1} & \frac{1}{C_1}D^{-1}+R_2+L_4D & -R_2 & -L_4D & 0 \\ 0 & -R_2 & R_2+\frac{1}{C_3}D^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -L_4D & 0 & L_4D+R_5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \\ i_\delta(t) \\ V_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -V_f(t) \\ V_f(t) \\ I_f(t) \end{bmatrix}$$

Alternativamente, si se asigna una corriente a través de la fuente de voltaje, es posible utilizar la formulación directa del método de voltajes de nodo:



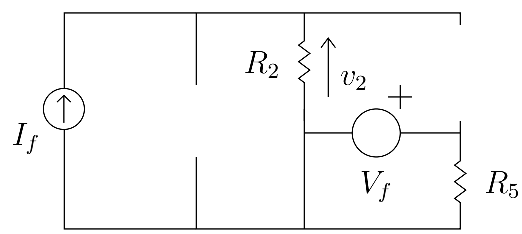
$$\begin{bmatrix} C_1D+\frac{1}{R_2}+C_3D & -\frac{1}{R_2} & -C_3D \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{L_4}D^{-1} & 0 \\ -C_3D & 0 & C_3D+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\alpha(t) \\ V_\beta(t) \\ V_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_f(t) \\ -i_x(t) \\ i_x(t) \end{bmatrix}$$

En el sistema descrito por la ecuación matricial anterior hay que sincerar el hecho que la corriente $i_x(t)$ **es una incógnita** y que el voltaje entre el nodo β y el nodo γ **es conocido**, es decir, $V_\gamma(t) - V_\beta(t) = V_f(t)$. De esta forma:

$$\begin{bmatrix} C_1D + \frac{1}{R_2} + C_3D & -\frac{1}{R_2} & -C_3D & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_4}D^{-1} & 0 & 1 \\ -C_3D & 0 & C_3D + \frac{1}{R_5} & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\alpha(t) \\ V_\beta(t) \\ V_\gamma(t) \\ i_x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_f(t) \\ 0 \\ 0 \\ V_f(t) \end{bmatrix}$$

2.5.2 Dado que las fuentes de voltaje y de corriente son constantes, en estado estacionario todas las corrientes y voltajes en el circuito son constantes.

Esto implica que los condensadores se comportan como circuitos abiertos y la inductancia como un cortocircuito:



Donde, usando superposición, se aprecia que, en estado estacionario,

$$v_2 = I_f \cdot R_2 = 5[mA] \cdot 2[k\Omega] = 10[V]$$

MSB-JYE/130511