ELO102 – Teoría de Redes I – 1er. Semestre 2011
Tercer Certamen y soluciones

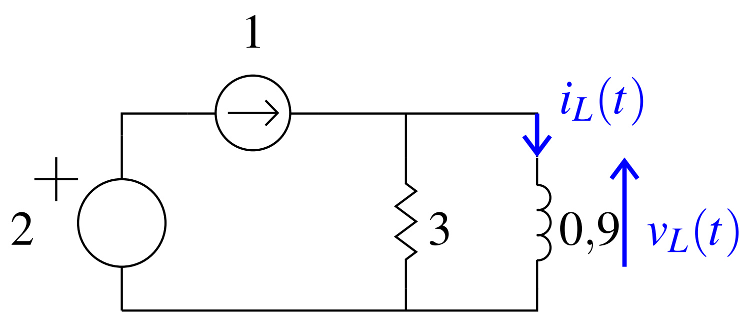
TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN ESTAR JUSTIFICADAS

Cuando no sea posible calcular manualmente, deje sus resultados expresados en la forma más simple posible.
UNIDADES EN S.I.

Problema 3.1 (10 puntos) Considere la red de la figura en que las condiciones iniciales son cero.

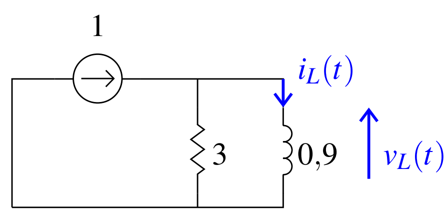
(a) Determine $v_L(t)$, $t \geq 0$.

(b) Determine la potencia instantánea entregada o absorbida por cada una de las fuentes, para $t \geq 0$.



Solución

(a) Para efectos de calcular $v_L(t)$ la fuente de voltaje es redundante. La red equivalente se muestra en la figura



Se puede obtener la ecuación diferencial asociada a la corriente por el inductor:

$$L\frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t) = R[1 - i_L(t)]$$
$$\Rightarrow \quad \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 1$$

cuya solución (vista en clases) es

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} \qquad \tau = \tfrac{L}{R} = 0{,}3$$
$$\Rightarrow \quad i_L(t) = 1 - e^{-t/0{,}3}$$
$$\Rightarrow \quad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = 3e^{-t/0{,}3}$$

(b) Para calcular la potencia instantánea entregada por cada una de las fuentes **no puede eliminarse la fuente de tensión**.

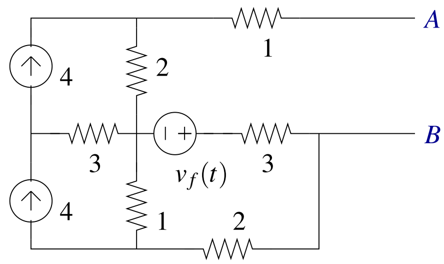
Para la fuente de tensión de 2[V], por ella pasan 1[A] (en referencia no combinada) por tanto, la potencia instantánea entregada es

$$p_1(t) = 2 \text{ [W] para todo } t \geq 0$$

En el caso de la fuente de corriente de 1[A], la diferencia de tensión entre sus terminales (en referencia no combinada) es $v_L(t) - 2$. Por tanto, la potencia instantánea entregada es

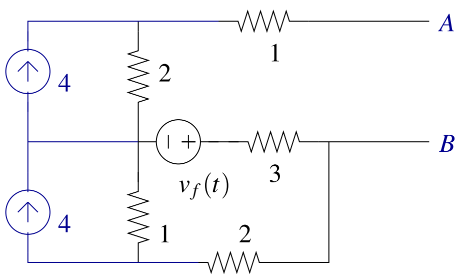
$$p_2(t) = 1(3e^{-t/0{,}3} - 2)$$
$$= 3e^{-t/0{,}3} - 2 \text{ [W] para todo } t \geq 0$$

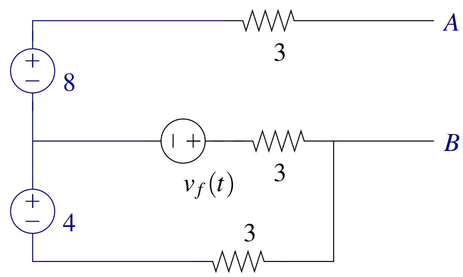
Problema 3.2 (10 puntos) Considere la red que se muestra en la figura. Determine los equivalentes Thévenin y Norton para la red dada, desde los terminales A y B.



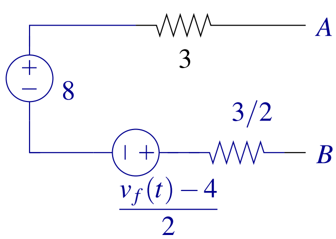
Solución

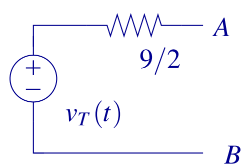
Al aplicar LCK en el nodo donde se conectan las fuentes de 4 $[A]$ y el resistor de $3[\Omega]$, se observa que la corriente por este último es 0, independientemente del resto del mundo; por lo tanto ese resistor se puede sacar y reemplazar por un cortocircuito. Luego, por movilidad de fuentes de corriente, y luego por transformación de fuentes, se llega a



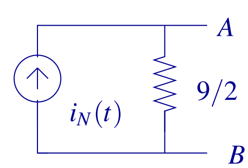


Aplicando Millman a las dos ramas inferiores se obtiene la red de la figura, desde donde se calculan los equivalentes Thevenin y Norton pedidos



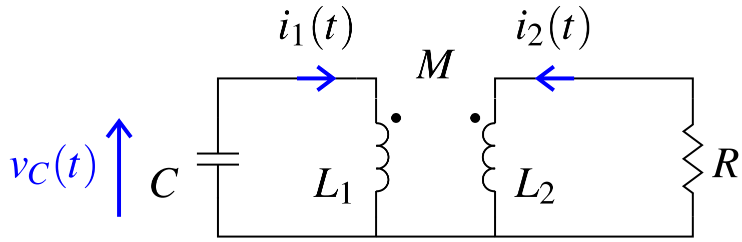


$$v_T(t) = 10 - \frac{v_f(t)}{2}$$



$$i_N(t) = \frac{20 - v_f(t)}{9}$$

Problema 3.3 (10 puntos) Considere la red de la figura en que: $v_C(0) = a$, $i_1(0) = b$, $i_2(0) = c$. Determine la energía total disipada por la resistencia R en el intervalo $[0, \infty)$.

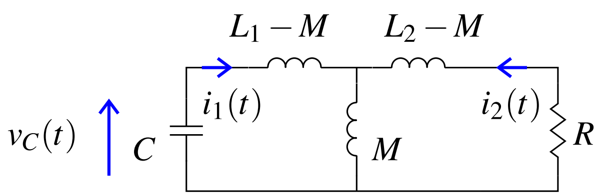


Solución

La energía total disipada por la resistencia es igual a la energía total inicialmente almacenada en el condensador y los inductores acoplados magnéticamente:

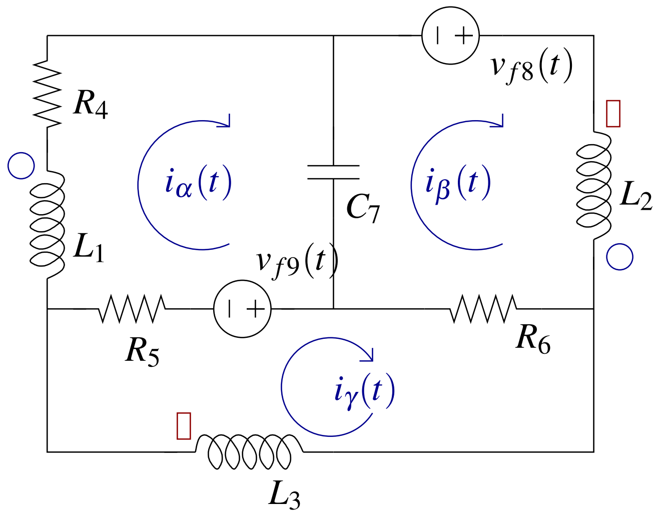
$$\begin{aligned} E_T &= \left[\frac{1}{2}C{v_C}^2(0)\right] + \left[\frac{1}{2}L_1{i_1}^2(0) + \frac{1}{2}L_2{i_2}^2(0) + Mi_1(0)i_2(0)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[Ca^2 + L_1b^2 + L_2c^2 + 2Mbc\right] \end{aligned}$$

El mismo resultado se obtiene si se reemplazan los inductores acoplados magnéticamente por un modelo equivalente con 3 inductores (no acoplados) como se muestra en la figura:



$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{2}C{v_C}^2(0) + \frac{1}{2}(L_1 - M){i_1}^2(0) + \frac{1}{2}(L_2 - M){i_2}^2(0) + \frac{1}{2}M(i_1(0) + i_2(0))^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[Ca^2 + L_1b^2 - Mb^2 + L_2c^2 - Mc^2 + M(b+c)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[Ca^2 + L_1b^2 + L_2c^2 + 2Mbc\right] \end{aligned}$$

Problema 3.4 (10 puntos) Considere la red de la figura.



Si se aplica el método de mallas, SIN CONSIDERAR LOS ACOPLAMIENTOS, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} R_4+R_5+L_1D+\dfrac{1}{C_7D} & -\dfrac{1}{C_7D} & -R_5 \\ -\dfrac{1}{C_7D} & R_6+L_2D+\dfrac{1}{C_7D} & -R_6 \\ -R_5 & -R_6 & R_5+R_6+L_3D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{f9} \\ v_{f8} \\ v_{f9} \end{bmatrix}$$

¿Cómo se modifica esta ecuación si ahora se consideran los acoplamientos? Denote por M_{12} la inductancia mutua entre L_1 y L_2, y por M_{23} la inductancia mutua entre L_2 y L_3.

Solución

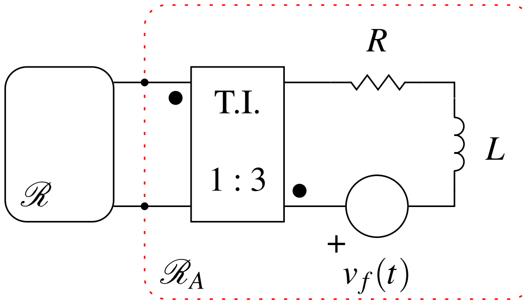
Los cambios son los siguientes:

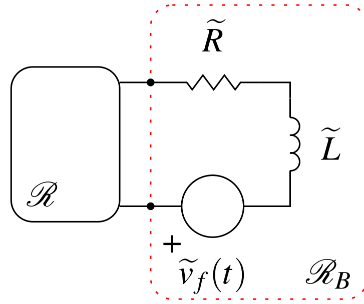
- En el equilibrio de tensiones de la malla α hay que agregar la tensión inducida (acop. aditivo) por $i_\beta(t)$ debido al acoplamiento $1-2$
- En el equilibrio de tensiones de la malla β hay que agregar la tensión inducida (acop. aditivo) por $i_\alpha(t)$ debido al acoplamiento $1-2$, y la tensión inducida (acop. sustractivo) por $i_\gamma(t)$ debido al acoplamiento $2-3$
- En el equilibrio de tensiones de la malla γ hay que agregar la tensión inducida (acop. sustractivo) por $i_\beta(t)$ debido al acoplamiento $2-3$

Al aplicar estos cambios, la ecuación de mallas cambia a:

$$\begin{bmatrix} R_4+R_5+L_1D+\dfrac{1}{C_7D} & -\dfrac{1}{C_7D}+M_{12}D & -R_5 \\ -\dfrac{1}{C_7D}+M_{12}D & R_6+L_2D+\dfrac{1}{C_7D} & -R_6-M_{23}D \\ -R_5 & -R_6-M_{23}D & R_5+R_6+L_3D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \\ i_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{f9}(t) \\ v_{f8}(t) \\ v_{f9}(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Problema 3.5 (10 puntos) Considere las redes $\mathscr{R}_A$ y $\mathscr{R}_B$ en la figura

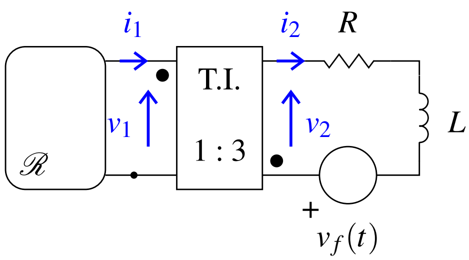


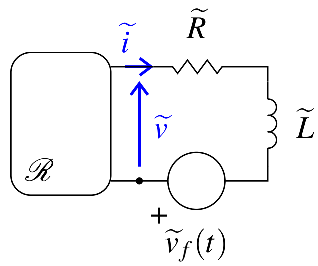


Si la red $\mathscr{R}_A$ es dada, ¿Existen $\widetilde{R}$, $\widetilde{L}$ y $\widetilde{v}_f(t)$ en la red $\mathscr{R}_B$ tales que ambas redes sean equivalentes para toda red $\mathscr{R}$ (suponiendo condiciones iniciales iguales a cero)? Si su respuesta es afirmativa, entonces calcule $\widetilde{R}$, $\widetilde{L}$ y $\widetilde{v}_f(t)$ en función de los datos tal que la equivalencia mencionada se cumpla.

Solución

En primer lugar, definimos variables como en la figura





En la red $\mathscr{R}_A$ tenemos que

$$v_2(t) = Ri_2(t) + LDi_2(t) - v_f(t) \tag{2}$$

Mientras que el transformador ideal establece las relaciones:

$$v_2(t) = -3v_1(t) \qquad i_2(t) = -\frac{1}{3}i_1(t)$$

Por tanto, reemplazando en (2), tenemos que

$$-3v_1(t) = -\frac{R}{3}i_1(t) - \frac{L}{3}Di_1(t) - v_f(t)$$
$$\Rightarrow \quad v_1(t) = \frac{R}{9}i_1(t) + \frac{L}{9}Di_1(t) + \frac{1}{3}v_f(t)$$

Por su parte, en la red $\mathscr{R}_B$ tenemos que

$$\widetilde{v}(t) = \widetilde{R}\widetilde{i}(t) + \widetilde{L}D\widetilde{i}(t) - \widetilde{v}_f(t) \tag{3}$$

Por tanto $\mathscr{R}_A$ y $\mathscr{R}_B$ son equivalentes si y solo si

$$\widetilde{R} = \frac{R}{9} \qquad \widetilde{L} = \frac{L}{9} \qquad \widetilde{v}_f(t) = -\frac{v_f(t)}{3}$$