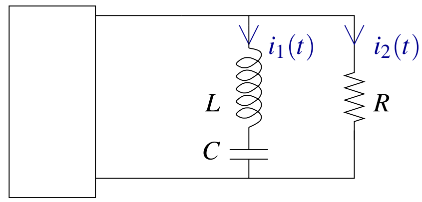
ELO102 – Teoría de Redes I – 1er. Semestre 2011
Cuarto Certamen y soluciones

Problema 4.1 (10 pts) La red de la figura tiene sólo excitaciones sinusoidales de una única frecuencia ω conocida. Suponga estado estacionario. Determine las condiciones que deben satisfacer R, L y C de modo que $i_1(t)$ e $i_2(t)$ tengan la misma amplitud.



Solución

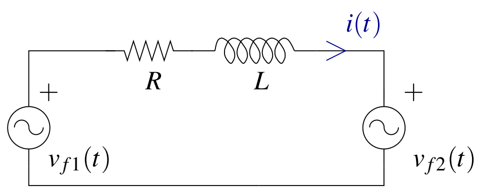
Ambas impedancias tienen la misma tensión, por lo tanto

$$\underset{\cdot}{V}_1 = \underset{\cdot}{V}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\cdot}{I}_1 \left[j\omega L + 1/(j\omega C) \right] = \underset{\cdot}{I}_2 R$$

Por tanto, ambas corrientes tienen la misma amplitud si y solo si

$$R = |\omega L - 1/(\omega C)|$$

Problema 4.2 (10 pts) En la red de la figura se sabe que $v_{f1}(t) = 400\cos(\omega t)$, $v_{f2}(t) = 400\sin(\omega t)$, $\omega L = 30$, $R = 40$. Calcule la amplitud de la corriente $i(t)$.



Solución

La transformada fasorial de la tensión a través de la combinación RL es

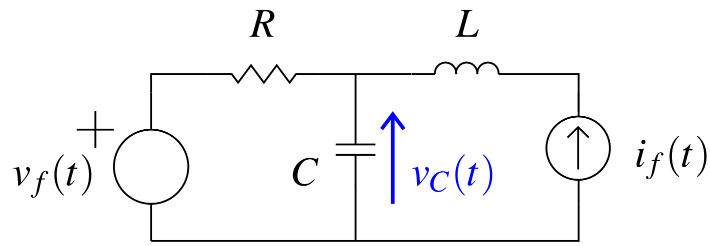
$$\underset{\cdot}{V} = \underset{\cdot}{V}_{f1} - \underset{\cdot}{V}_{f2} = \frac{400}{\sqrt{2}} + j\frac{400}{\sqrt{2}} = 400\angle(-\tfrac{\pi}{4})$$

Por lo tanto

$$\underset{\cdot}{I} = \frac{\underset{\cdot}{V}}{30 + j40} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{400}{50} = 8\,[A]$$

En consecuencia, la amplitud de $i(t)$ es $\sqrt{2}I = 8\sqrt{2}$ $[A]$

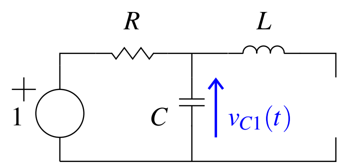
Problema 4.3 (10 puntos) Considere la red de la figura en que $v_f(t) = 1$, $i_f(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t)$ y R, L, C y ω son conocidos. Determine $v_C(t)$ en estado estacionario.



Solución

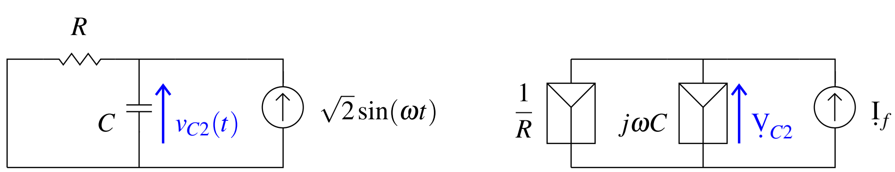
Dado que las fuentes en el circuito son de diferente frecuencia, se debe aplicar **superposición**.

(a) Para frecuencia cero, sólo se considera la fuente de voltaje. La de corriente se apaga, reemplazándola por un circuito abierto.



Donde fácilmente se aprecia que, en estado estacionario, $v_{C1}(t) = 1$, es decir, el condensador se carga hasta alcanzar al voltaje de la fuente que es continua.

(b) Para una frecuencia $\omega > 0$, sólo se considera la fuente de corriente. La fuente de voltaje se apaga, reemplazándola por un corto-circuito. Además note que, para efectos del voltaje en el condensador, la inductancia L es redundante por estar en serie con la fuente de corriente. En la figura se muestra la red a analizar y su representación en el dominio de la transformada fasorial:



La transformada fasorial de la fuente de corriente es

$$\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_f = \mathscr{P}\{\sqrt{2}\sin(\omega t)\} = \mathscr{P}\{\sqrt{2}\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2})\} = 1\angle\tfrac{-\pi}{2} = -j$$

Entonces la transformada fasorial del voltaje $v_{C2}(t)$ es

$$\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_{C2} = \frac{\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_f}{\underset{\cdot}{\mathrm{Y}}_R + \underset{\cdot}{\mathrm{Y}}_C} = \frac{-j}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\angle(\tfrac{-\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega RC))$$

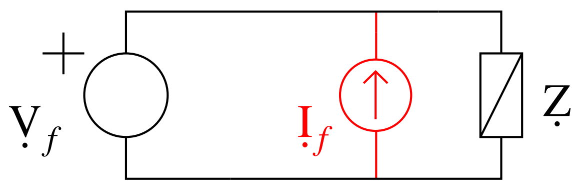
Por tanto, en el dominio temporal:

$$v_{C2}(t) = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega RC)) = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega RC))$$

Finalmente, el voltaje $v_C(t)$ en estado estacionario es la suma de ambos voltajes calculados:

$$v_C(t) = v_{C1}(t) + v_{C2}(t) = 1 + \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega RC))$$

Problema 4.4 (10 puntos) En la red de la figura se conocen $\underset{\cdot}{V}_f = V_f\angle 0$ y $\underset{\cdot}{Z} = Z\angle\phi$. Determine qué condiciones debe satisfacer $\underset{\cdot}{I}_f = I_f\angle\theta$ (en función de los datos conocidos V_f, Z, ϕ) de manera que la fuente de voltaje no entregue ni absorba potencia REACTIVA y la fuente de corriente no entregue ni absorba potencia ACTIVA.



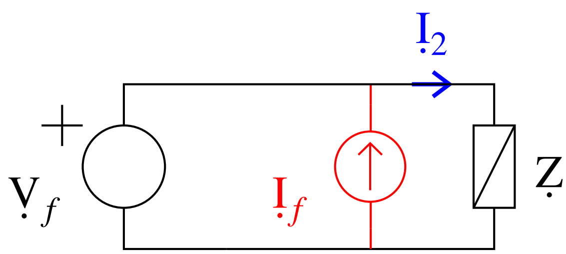
Solución

En primer lugar, la potencia aparente absorbida por la impedancia $\underset{\cdot}{Z}$ es igual a la suma de las potencias aparentes entregadas por las fuentes.

$$\underset{\cdot}{P}_{ap}(\underset{\cdot}{V}_f) + \underset{\cdot}{P}_{ap}(\underset{\cdot}{I}_f) = \underset{\cdot}{P}_{ap}(\underset{\cdot}{Z})$$

Determinamos primero la potencia aparente absorbida por la impedancia:

$$\begin{aligned}\underset{\cdot}{P}_{ap}(\underset{\cdot}{Z}) = \underset{\cdot}{V}_f \underset{\cdot}{I}_2^* = \underset{\cdot}{V}_f \left(\frac{\underset{\cdot}{V}_f}{\underset{\cdot}{Z}}\right)^* &= \frac{V_f^2}{Z}\angle\phi \\ &= \frac{V_f^2}{Z}\cos\phi + j\frac{V_f^2}{Z}\sin\phi\end{aligned}$$



La potencia aparente entregada por la fuente de corriente es

$$\begin{aligned}\underset{\cdot}{P}_{ap}(\underset{\cdot}{I}_f) = \underset{\cdot}{V}_f \underset{\cdot}{I}_f^* &= V_f I_f \angle(-\theta) \\ &= V_f I_f \cos\theta - jV_f I_f \sin\theta\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

(a) La fuente de corriente no entrega (ni absorbe) potencia activa

$$V_f I_f \cos\theta = 0$$

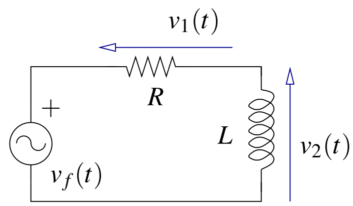
(b) ... y la potencia reactiva absorbida por la impedancia tiene que ser entregada por la fuente de corriente, es decir,

$$-V_f I_f \sin\theta = \frac{V_f^2}{Z}\sin\phi$$

Para satisfacer **ambas** condiciones, podemos elegir

$$\begin{cases}\theta = \frac{\pi}{2} \\ I_f = -\frac{V_f}{Z}\sin\phi\end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases}\theta = \frac{-\pi}{2} \\ I_f = \frac{V_f}{Z}\sin\phi\end{cases}$$

Problema 4.5 (10 pts) En la red de la figura se sabe que $v_f(t) = 220\sqrt{2}\cos(\omega t)$ y que el factor de potencia (FP) de la impedancia RL es 0,8. Calcule las amplitudes de $v_1(t)$ y $v_2(t)$



Solución Aplicando divisor de tensiones en el dominio de la transformada fasorial, se tiene que

$$V_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} V_f \qquad V_2 = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} V_f$$

Lo anterior se puede re-escribir como

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega L)^2/R^2}} V_f \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/(\omega L)^2}} V_f$$

Por otro lado, como $FP = 0{,}8$, se concluye que

$$3R = 4\omega L$$

De allí se obtiene que

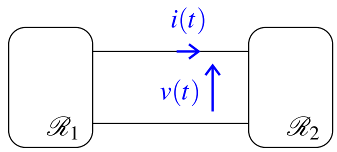
$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 9/16}} 220 = 176[V] \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 16/9}} 220 = 132[V]$$

Así, las amplitudes de $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son $176\sqrt{2}[V]$ y $132\sqrt{2}[V]$, respectivamente.

Problema 4.6 (10 pts) La figura representa dos redes con excitación sinusoidal de la misma frecuencia, en estado estacionario. Se sabe que

$$v(t)i(t) = 1000 + 1250\cos\left(2\omega t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

Determine, si es posible, la potencia activa y la potencia reactiva que **entra** a la red $\mathscr{R}_2$



Solución

Recordamos que, si

$$\begin{aligned} v(t) &= \hat{V}\cos(\omega t + \alpha) \\ i(t) &= \hat{I}\cos(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} p(t) = v(t)i(t) &= \hat{V}\cos(\omega t + \alpha)\hat{I}\cos(\omega t + \beta) \\ &= \frac{\hat{V}\hat{I}}{2}\left[\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \cos\phi\right] \\ &= \underbrace{VI\cos\phi}_{P_{ac}} + \underbrace{VI}_{|\underset{\cdot}{\mathrm{P}}|}\cos(2\omega t + \alpha + \beta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la magnitud de la potencia compleja aparente es

$$P = |\underset{\cdot}{\mathrm{P}}| = 1250[VA]$$

y la potencia activa y el factor de potencia son:

$$P_{ac} = 1000[W] \qquad F.P. = \cos\phi = 0{,}8$$

Con esto podemos determinar **sólo el valor absoluto de la potencia reactiva**:

$$P = \sqrt{P_{ac}^2 + Q^2} \quad \Rightarrow \quad |Q| = \sqrt{P^2 - P_{ac}^2} = 750$$

Note que **no** hay forma de saber el signo de $\phi = \alpha - \beta$ en base a la información disponible.