

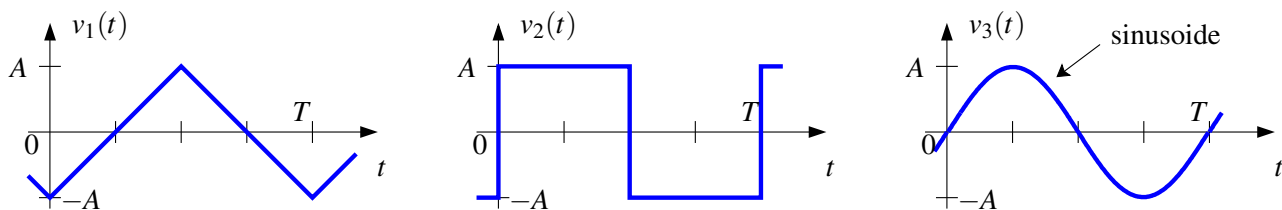
ELO102 – Teoría de Redes I – 1S 2012

Primer Certamen y soluciones

TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN ESTAR JUSTIFICADAS

Cuando no sea posible calcular manualmente, deje sus resultados expresados en la forma más simple posible. UNIDADES EN S.I.

Problema 1.1 (10 puntos) Las tres señales de voltaje de la figura tienen el mismo período T , la misma amplitud máxima A y valor medio igual a cero. Ordénalas de acuerdo a su valor efectivo o *RMS*.



Solución

En primer lugar, el valor efectivo o *RMS* está dado por

$$v_{\ell,RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_{\ell}^2(t) dt} \quad (1)$$

$v_1(t)$: La señal al cuadrado resulta en dos arcos de parábola en el intervalo $[0, T]$. El área (es decir, la integral) bajo estos arcos se puede separar en intervalos iguales. Entonces,

$$v_{1,RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot A^2 \cdot \frac{T}{4}} = \frac{A}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

$v_2(t)$: En este caso, la señal al cuadrado es constante e igual a A^2 . Por tanto

$$v_{2,RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot A^2 \cdot T} = A \quad (3)$$

$v_3(t)$: La función es una senoide. Por tanto, como se vio en clase, su valor efectivo es igual a

$$v_{3,RMS} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

Por tanto, el orden de las señales, de mayor a menor valor efectivo es: $v_2(t)$, $v_3(t)$ y $v_1(t)$.

Problema 1.2 (10 puntos) Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo para el cual

$$r_1(t) = T\langle -1, \sin(t) \rangle = -0,5e^{-t} - 0,5\cos(t) + 0,5\sin(t)$$

$$r_2(t) = T\langle 2, 0 \rangle = 2e^{-t}$$

Determine la respuesta $r_3(t)$ cuando el estado inicial es cero y la excitación es $\cos(t)$.

Solución

Dado que el sistema es lineal, tenemos que, en primer lugar:

$$\begin{aligned} T\langle 2, 0 \rangle &= 2e^{-t} \\ \Rightarrow T\langle -1, 0 \rangle &= -e^{-t} \end{aligned}$$

También por linealidad, la respuesta $r_1(t)$ puede descomponerse como:

$$T\langle -1, \sin(t) \rangle = T\langle -1, 0 \rangle + T\langle 0, \sin(t) \rangle$$

Reemplazando, se obtiene

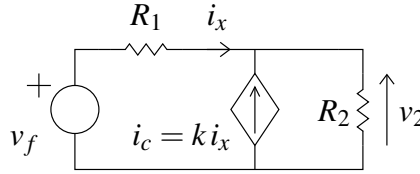
$$\begin{aligned} -0,5e^{-t} - 0,5\cos(t) + 0,5\sin(t) &= -e^{-t} + T\langle 0, \sin(t) \rangle \\ \Rightarrow T\langle 0, \sin(t) \rangle &= 0,5e^{-t} - 0,5\cos(t) + 0,5\sin(t) \end{aligned}$$

Finalmente, por invariancia en el tiempo, se tiene que

$$\begin{aligned} r_3(t) &= T\langle 0, \cos(t) \rangle = T\langle 0, \frac{d}{dt} \sin(t) \rangle \\ &= \frac{d}{dt} T\langle 0, \sin(t) \rangle \\ &= \frac{d}{dt} (0,5e^{-t} - 0,5\cos(t) + 0,5\sin(t)) \\ &= -0,5e^{-t} + 0,5\sin(t) + 0,5\cos(t) \end{aligned}$$

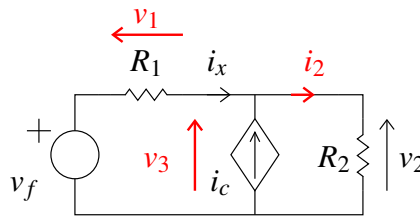
Problema 1.3 (10 puntos) En la red de la figura los datos son R_1 , R_2 , k y $v_f(t)$.

- Plantee un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red
- Determine una expresión para el voltaje $v_2(t)$.



Solución

- En primer lugar, definimos las variables a utilizar como en la figura:



Las incógnitas serán por tanto: $i_x, i_2, i_c, v_1, v_2, v_3$.

A continuación formulamos las ecuaciones:

$$\text{LVK: } \begin{cases} v_f - v_1 - v_3 = 0 \\ v_3 - v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{LCK: } \begin{cases} i_x + i_c - i_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{3er. postulado: } \begin{cases} v_1 = R_1 i_x \\ v_2 = R_2 i_2 \\ i_c = k i_x \end{cases}$$

Por tanto, tenemos 6 ecuaciones l.i. y 6 incógnitas, lo que forma un sistema consistente.

- Del sistema anterior, debemos despejar $v_2(t)$. De las ecuaciones de LVK tenemos que

$$v_2 = v_f - v_1 = v_f - R_1 i_x$$

De las ecuaciones de LCK, tenemos que

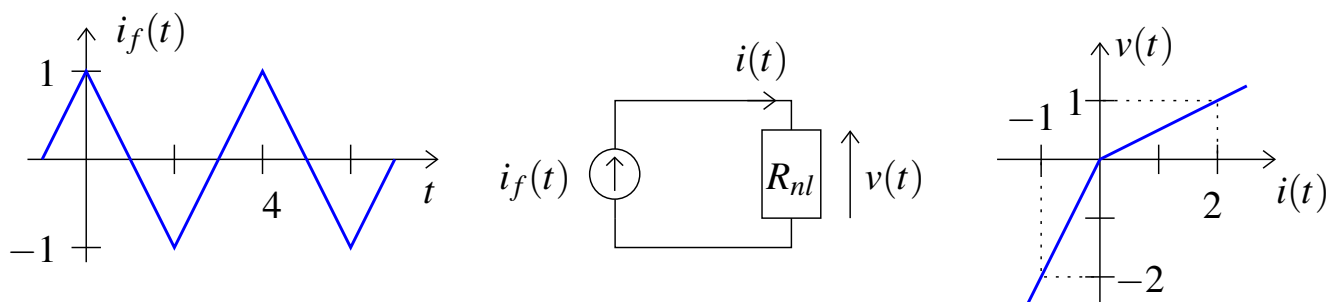
$$i_x + k i_x - \frac{v_2}{R_2} = 0 \Rightarrow i_x = \frac{1}{(1+k)} \frac{v_2}{R_2}$$

Por tanto,

$$v_2 = v_f - R_1 \frac{1}{(1+k)} \frac{v_2}{R_2} \Rightarrow v_2 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2(1+k)} \right)^{-1} v_f$$

Problema 1.4 (10 puntos) En la figura se muestra la corriente $i_f(t)$ entregada por la fuente y la característica voltaje/corriente de la resistencia no lineal R_{nl} .

- Haga un gráfico del voltaje $v(t)$
- Determine la potencia promedio disipada por R_{nl} .



Solución

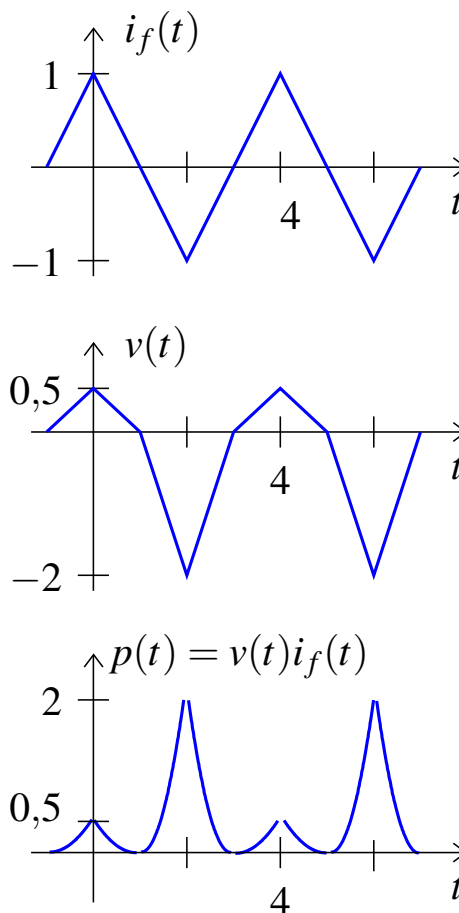
- La interconexión de R_{nl} con la fuente establece que $i(t) = i_f(t)$. Además, la característica voltaje / corriente indica que

$$\begin{aligned} i(t) \geq 0 &\Rightarrow v(t) = \frac{1}{2}i(t) = \frac{1}{2}i_f(t) \\ i(t) \leq 0 &\Rightarrow v(t) = 2i(t) = 2i_f(t) \end{aligned}$$

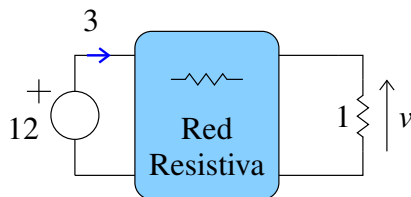
Por tanto, la gráfica de $v(t)$ es como en la figura.

- La potencia instantánea también se puede obtener graficamente como se ve en la figura. La potencia promedio entonces es el área bajo la curva en un periodo dividida por el periodo:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[2 \frac{1 \cdot 0,5}{3} + 2 \frac{1 \cdot 2}{3} \right] \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$



Problema 1.5 (10 puntos) En el circuito de la figura, la red en el centro es **resistiva** (y sin fuentes), pero se desconoce la interconexión. Determine el valor mínimo y máximo posible del voltaje v .



Solución

Como les comenté en clases el problema se puede abordar de (al menos) tres formas:

- (a) Dado que la red central es resistiva, sólo puede disipar potencia. Por tanto, la potencia máxima que puede ser disipada por la resistencia de $1\ [\Omega]$ es la entregada por la fuente:

$$p_{\text{fuente}} = 12 \cdot 3 = 36[W]$$

Por tanto,

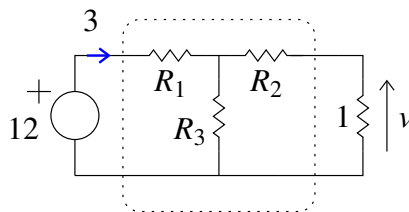
$$p_R = \frac{v^2}{R} \leq 36 \Rightarrow \frac{v^2}{1} \leq 36 \Rightarrow -6 \leq v \leq 6$$

- (b) Dado que la fuente es de $12[V]$ y que en la red central no hay fuentes, el voltaje máximo en la resistencia de $1[\Omega]$ puede ser 12 (o -12) $[V]$.

Asimismo, dado que la fuente entrega $3\ [A]$ y que en la red central no hay fuentes, la corriente máxima por la resistencia de $1[\Omega]$ puede ser 3 (o -3) $[A]$. Esto implica que el voltaje máximo puede ser sólo de $3\ [V]$

Este argumento (un tanto *intuitivo*) se puede formalizar como se detalla en el punto siguiente.

- (c) En *ELO103 – Redes Eléctricas II* se estudian *cuadripolos* o *redes de dos puertas* que tienen dos pares de terminales, tal como la que aparece en la parte central del circuito dado. En dicho curso se estudiará que **toda red resistiva y sin fuentes** como la de la figura se puede reemplazar por una red T equivalente:



Entonces, el problema es encontrar el máximo valor del voltaje v , cuando R_1, R_2, R_3 varían en el intervalo $[0, \infty)$, sujeto a las ecuaciones del circuito. Este es un problema de optimización en varias variables.

Si planteamos las ecuaciones de LKV en cada malla del circuito, tenemos que

$$12 - 3R_1 - (3 - i)R_3 = 0 \quad (5)$$

$$(i - 3)R_3 + R_2i + i = 0 \quad (6)$$

en que i es la corriente por la resistencia de $1[\Omega]$. El problema es encontrar el máximo de i , sujeto a las ecuaciones (5)-(6) y las resistencias son positivas.

De las ecuaciones (5)-(6) se puede obtener expresiones para la corriente i y para la resistencia R_1 , en función de R_2 y R_3 :

$$i = i(R_2, R_3) = \frac{3R_3}{R_2 + R_3 + 1} \quad (7)$$

$$R_1 = R_1(R_2, R_3) = 4 - R_3 + \frac{R_3^2}{1 + R_2 + R_3} \quad (8)$$

Para encontrar el punto óptimo calculamos las derivadas parciales de i con respecto a R_2 y a R_3 , e igualamos a cero:

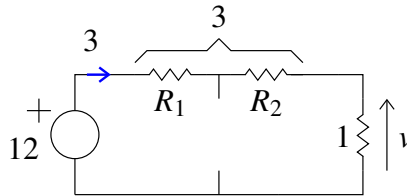
$$\frac{\partial i}{\partial R_2} = \frac{-3R_3}{(R_2 + R_3 + 1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial i}{\partial R_3} = \frac{3(R_2 + R_3 + 1) - 3R_3}{(R_2 + R_3 + 1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = -1 \quad (10)$$

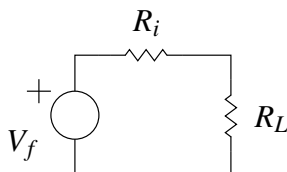
Sin embargo, el punto obtenido está fuera del dominio $(R_2, R_3) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$. En consecuencia, se debe buscar el máximo en la frontera:

- $R_2 = 0$ implica $i = \frac{3R_3}{R_3 + 1}$. Por tanto la corriente puede ir de $i = 0$ cuando $R_3 = 0$, hasta $i \rightarrow 3$ cuando $R_3 \rightarrow \infty$ (en este caso, note que $R_1 \rightarrow 3$).
- $R_3 = 0$ implica $i = 0$ (en este caso, note que $R_1 = 4$).
- $R_2 \rightarrow \infty$ implica $i \rightarrow 0$ y, adicionalmente, $R_1 + R_3 = 4$.
- $R_3 \rightarrow \infty$ implica $i \rightarrow 3$ y, adicionalmente, $R_1 + R_2 = 3$.

Todos los casos anteriores se pueden interpretarse desde el punto de vista de redes. Cuando $R_\ell = 0$ corresponde a un cortocircuito y cuando $R_\ell \rightarrow \infty$ corresponde a un circuito abierto. El voltaje máximo se logra en el cuarto de los casos discutidos que corresponde a:



Problema 1.6 (10 puntos) En la red de la figura, la fuente de voltaje es constante. Determine una expresión para R_L tal que la potencia absorbida por esta resistencia sea máxima.



Solución

La red corresponde a un divisor de tensión.

La tensión en R_L es, por tanto

$$v = \frac{R_L}{R_i + R_L} V_f$$

Y, en consecuencia, la potencia disipada es

$$p = \frac{v^2}{R_L} = \frac{R_L V_f^2}{(R_L + R_i)^2} = p(R_L)$$

Para encontrar el máximo, derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{dp}{dR_L} = \frac{(R_L + R_i)^2 - R_L 2(R_L + R_i)}{(R_L + R_i)^4} V_f^2 = \frac{(R_L + R_i) - 2R_L}{(R_L + R_i)^3} V_f^2 = 0$$

De la condición anterior se obtiene

$$R_L = R_i$$

Para este valor, se tiene que

$$p = \frac{V_f^2}{4R_i}$$

Este valor corresponde a un máximo pues...

$$R_L \rightarrow 0 \Rightarrow v \rightarrow 0 \Rightarrow p \rightarrow 0$$

$$R_L \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 0 \Rightarrow p \rightarrow 0$$