ELO102 – Teoría de Redes I – 1S 2012
Tercer Certamen y soluciones

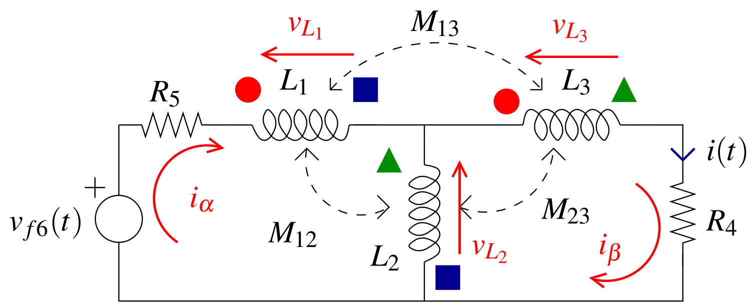
TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN ESTAR JUSTIFICADAS

Cuando no sea posible calcular manualmente, deje sus resultados expresados en la forma más simple posible. UNIDADES EN S.I.

Problema 3.1 (10 puntos) En la red de la figura, $v_{f6}(t) = \hat{V}\sin(\omega t)$.

(a) Determine $\underset{\cdot}{I}$ en función de $L_1, L_2, L_3, M_{12}, M_{13}, M_{23}, R_4, R_5, \hat{V}$ y ω.

(b) Determine la corriente $i(t)$ en estado estacionario si $L_1 = L_2 = 0{,}1$; $L_3 = 0{,}2$; $M_{12} = M_{23} = 0{,}05$; $M_{13} = 0{,}1$; $R_4 = 3$; $R_5 = 4$; $\hat{V} = 1$ y $\omega = 10$.



Solución

(a) Para resolver, aplicamos método de corrientes de malla, haciendo LVK en cada una de ellas:

$$v_{f6} = R_5 i_\alpha + \underbrace{L_1\frac{d\,i_\alpha}{dt} + M_{12}\frac{d\,(i_\alpha - i_\beta)}{dt} + M_{13}\frac{d\,i_\beta}{dt}}_{v_{L_1}} + \underbrace{L_2\frac{d\,(i_\alpha - i_\beta)}{dt} + M_{12}\frac{d\,i_\alpha}{dt} - M_{23}\frac{d\,i_\beta}{dt}}_{v_{L_2}}$$

$$0 = \underbrace{L_2\frac{d\,(i_\beta - i_\alpha)}{dt} - M_{12}\frac{d\,i_\alpha}{dt} + M_{23}\frac{d\,i_\beta}{dt}}_{-v_{L_2}} + \underbrace{L_3\frac{d\,i_\beta}{dt} + M_{13}\frac{d\,i_\alpha}{dt} + M_{23}\frac{d\,(i_\beta - i_\alpha)}{dt}}_{v_{L_3}} + R_4 i_\beta$$

Aplicando transformada fasorial y escribiendo matricialmente se obtiene:

$$\begin{bmatrix} R_5 + j\omega(L_1 + 2M_{12} + L_2) & j\omega(-M_{12} + M_{13} - L_2 - M_{23}) \\ j\omega(-M_{12} + M_{13} - L_2 - M_{23}) & R_4 + j\omega(L_2 + 2M_{23} + L_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\cdot}{I}_\alpha \\ \underset{\cdot}{I}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\cdot}{V}_{f6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para $\underset{\cdot}{I}_\beta = \underset{\cdot}{I}$ tenemos que

$$\underset{\cdot}{I} = \frac{\det\begin{bmatrix} R_5 + j\omega(L_1 + 2M_{12} + L_2) & \underset{\cdot}{V}_{f6} \\ j\omega(-M_{12} + M_{13} - L_2 - M_{23}) & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} R_5 + j\omega(L_1 + 2M_{12} + L_2) & j\omega(-M_{12} + M_{13} - L_2 - M_{23}) \\ j\omega(-M_{12} + M_{13} - L_2 - M_{23}) & R_4 + j\omega(L_2 + 2M_{23} + L_3) \end{bmatrix}}$$

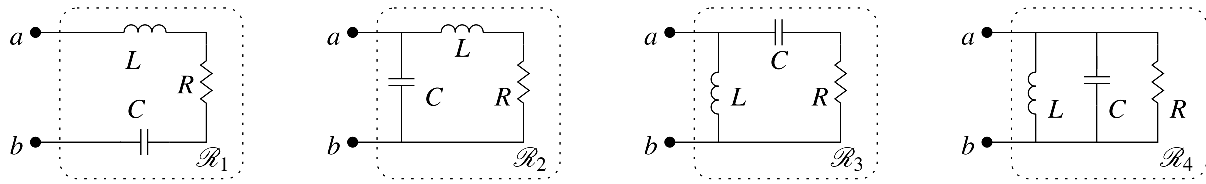
$$= \frac{\underset{\cdot}{V}_{f6}\, j\omega(M_{12} - M_{13} + L_2 + M_{23})}{(R_5 + j\omega(L_1 + 2M_{12} + L_2))(R_4 + j\omega(L_2 + 2M_{23} + L_3)) + \omega^2(M_{12} - M_{13} + L_2 + M_{23})^2}$$

en que $\underset{\cdot}{V}_{f6} = \dfrac{\hat{V}}{\sqrt{2}}\angle\dfrac{-\pi}{2} = \dfrac{-j\hat{V}}{\sqrt{2}}$.

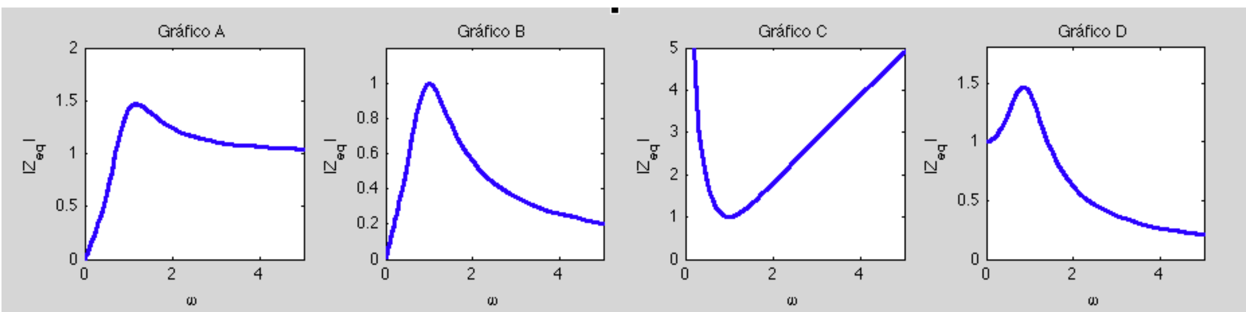
(b) Debido al problema con el valor numérico de M_{13} y M_{23} en el enunciado original, esta parte ha sido anulada y se les otorga TODO el puntaje asociado (4 puntos)

Problema 3.2 (10 puntos) Considere las cuatro redes de la figura

(a) Determine la impedancia equivalente desde los terminales $a-b$ para cada una.



(b) Determine a cuál de las redes anteriores puede corresponder cada uno de los siguientes gráficos de magnitud de la impedancia equivalente en función de la frecuencia ω, fundamentando claramente su respuesta (Note que **no** es necesario obtener el valor de las componentes):



Solución

(a) Las impedancias equivalentes son

$$\underset{\cdot}{Z}_{eq1} = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underset{\cdot}{Z}_{eq2} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L}} = \frac{R + j\omega L}{1-\omega^2 LC + j\omega RC}$$

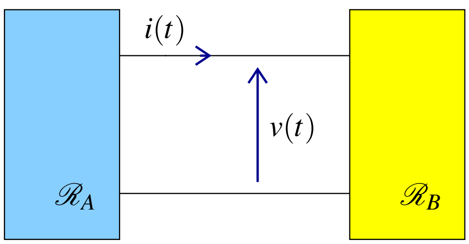
$$\underset{\cdot}{Z}_{eq3} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R+\frac{1}{j\omega C}}} = \frac{(R+\frac{1}{j\omega C})j\omega L}{R+\frac{1}{j\omega C}+j\omega L} = \frac{(1+j\omega RC)j\omega L}{1-\omega^2 LC + j\omega RC}$$

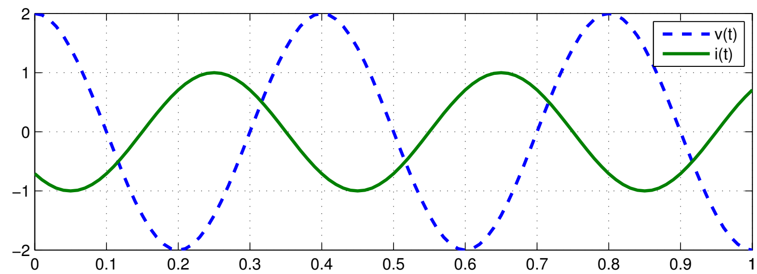
$$\underset{\cdot}{Z}_{eq4} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{j\omega RL}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L}$$

(b) Para establecer la relación con los gráficos de magnitud de impedancia, analizamos en baja frecuencia (en que L es un cortocircuito y C es un circuito abierto) y en alta frecuencia (en que L es un circuito abierto y C es un cortocircuito):

$\omega \to 0$	$\omega \to \infty$	...por lo tanto:
$\lvert\underset{\cdot}{Z}_{eq1}\rvert \to \infty$	$\lvert\underset{\cdot}{Z}_{eq1}\rvert \to \infty$	$\Rightarrow$ Gráfico C
$\lvert\underset{\cdot}{Z}_{eq2}\rvert \to R$	$\lvert\underset{\cdot}{Z}_{eq2}\rvert \to 0$	$\Rightarrow$ Gráfico D
$\lvert\underset{\cdot}{Z}_{eq3}\rvert \to 0$	$\lvert\underset{\cdot}{Z}_{eq3}\rvert \to R$	$\Rightarrow$ Gráfico A
$\lvert\underset{\cdot}{Z}_{eq4}\rvert \to 0$	$\lvert\underset{\cdot}{Z}_{eq4}\rvert \to 0$	$\Rightarrow$ Gráfico B

Problema 3.3 (10 puntos) En la interconexión de las redes $\mathscr{R}_{\mathscr{A}}$ y $\mathscr{R}_{\mathscr{B}}$ de la figura, se ha medido las señales de voltaje y corriente que aparecen en la gráfica. Determine, en promedio, cuál red entrega potencia a cuál red. Fundamente claramente su respuesta.





Solución

A partir de las graficas se obtiene que

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi \\ v(t) &= 2\cos(5\pi t) \\ i(t) &= \cos(5\pi(t-0{,}25)) = \cos(5\pi t - \tfrac{5\pi}{4}) \end{aligned}$$

Se puede afirmar directamente que, dado que el desfase entre $v(t)$ e$i(t)$ es mayor que $\frac{\pi}{2}$, entonces la red $\mathscr{R}_B$ no absorbe potencia sino que entrega (a la red $\mathscr{R}_A$).

Lo anterior puede verificarse si se calcula la potencia compleja aparente:

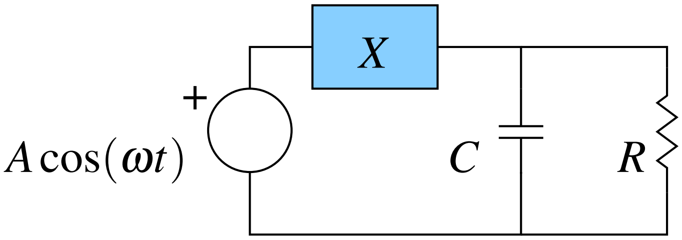
$$\underset{\cdot}{\mathrm{P}}_{ap} = \underset{\cdot}{\mathrm{V}}(\underset{\cdot}{\mathrm{I}})^* = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\angle\frac{-5\pi}{4}\right)^* = 1\angle\frac{5\pi}{4} = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}}_{P_{ac}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lo cual indica que la potencia activa absorbida por $\mathscr{R}_B$ es **negativa**, es decir, en promedio, esta red entrega potencia (a la red $\mathscr{R}_A$).

Problema 3.4 (10 puntos) En la red de la figura, A, ω, R y C son datos conocidos.

(a) Si X es un cortocircuito, determine el F.P. desde los terminales de la fuente.

(b) Proponga una componente X (tipo y valor) para que la fuente de voltaje **no** entregue potencia reactiva.



Solución

(a) El F.P. es igual a $\cos\phi$ en que ϕ es el angulo de la potencia compleja aparente que es igual al ángulo de la impedancia equivalente

Si X es un cortocircuito, la impedancia equivalente vista por la fuente es:

$$\underset{\cdot}{Z}_{eq} = \frac{1}{j\omega C} \| R = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}(1 - j\omega RC)$$

El $\cos\phi$ de dicha impedancia se puede obtener a partir del número complejo en paréntesis:

$$\text{F.P.} = \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

y corresponde F.P. capacitivo, pues $\phi < 0$.

(b) Para determinar X podemos suponer que tiene una impedancia $\underset{\cdot}{X}$. Entonces, la impedancia equivalente $\tilde{\underset{\cdot}{Z}}_{eq}$ es igual a

$$\tilde{\underset{\cdot}{Z}}_{eq} = \underset{\cdot}{Z}_{eq} + \underset{\cdot}{X} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}(1 - j\omega RC) + \underset{\cdot}{X}$$

Para que la fuente no entregue potencia reactiva, el ángulo de esta impedancia equivalente debe ser igual a cero o, lo que es lo mismo, su parte imaginaria debe ser igual a cero. Por tanto, en la expresión anterior, se observa que basta que $\underset{\cdot}{X}$ sea puramente imaginario y positivo, es decir, un **inductor**. Su valor queda dado por:

$$\underset{\cdot}{X} = j\omega L \quad \Rightarrow \quad \frac{-j\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j\omega L = 0$$

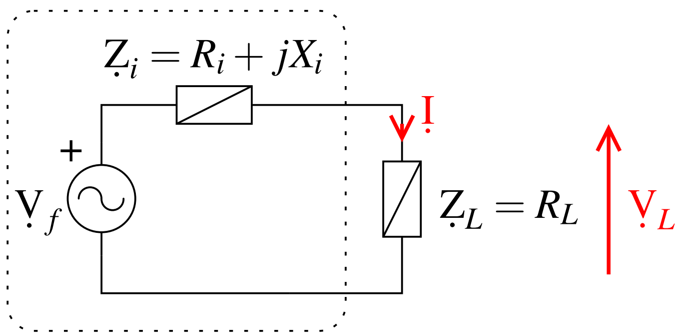
y, por tanto,

$$L = \frac{R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Problema 3.5 (10 puntos) Considere una fuente de voltaje sinusoidal con impedancia interna $\underset{\cdot}{Z}_i = R_i + jX_i$ conocida que se conecta a una resistencia R_L, tal como se muestra en la figura.

(a) Determina la potencia compleja aparente **entregada por la fuente**. de tensión.

(b) Determine para qué valor de R_L la potencia promedio **absorbida por dicha resistencia** es máxima.



Solución

(a) El enunciado quedó un tanto ambiguo. Cualquiera de las interpretaciones siguientes es aceptable:

- La potencia compleja aparente entregada por la fuente ideal de tensión es:

$$\underset{\cdot}{P}_{ap1} = \underset{\cdot}{V}_f(\underset{\cdot}{I})^* = \underset{\cdot}{V}_f\left(\frac{\underset{\cdot}{V}_f}{(R_i + jX_i) + R_L}\right)^* = \frac{V_f^2}{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}(R_i + R_L + jX_i)$$

- La potencia compleja aparente entregada por la fuente de tensión (no ideal, con impedancia interna) es la potencia absorbida por la resistencia R_L:

$$\underset{\cdot}{P}_{ap2} = \underset{\cdot}{V}_L(\underset{\cdot}{I})^* = \left(\frac{\underset{\cdot}{V}_f R_L}{(R_i + jX_i) + R_L}\right)\left(\frac{\underset{\cdot}{V}_f}{(R_i + jX_i) + R_L}\right)^* = \frac{V_f^2 R_L}{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}$$

(b) La potencia promedio absorbida por la resistencia R_L corresponde a la potencia $\underset{\cdot}{P}_{ap2}$ calculada anteriormente, dado que esta es real (sólo potencia activa, como es esperable en el caso de una resistencia). Para maximizarla, se deriva e iguala a cero:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dR_L}\left(\underset{\cdot}{P}_{ap2}\right) &= \frac{d}{dR_L}\left(\frac{V_f^2 R_L}{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}\right)\\
&= V_f^2 \frac{(R_i + R_L)^2 + X_i^2 - R_L 2(R_i + R_L)}{((R_i + R_L)^2 + X_i^2)^2}\\
&= V_f^2 \frac{R_i^2 - R_L^2 + X_i^2}{((R_i + R_L)^2 + X_i^2)^2} = 0
\end{aligned}$$

de donde se obtiene $R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = Z_i$