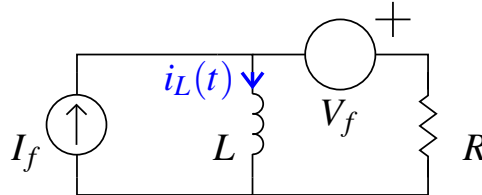


Segundo Certamen – ELO102 – 1S 2013

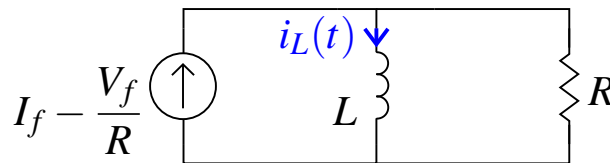
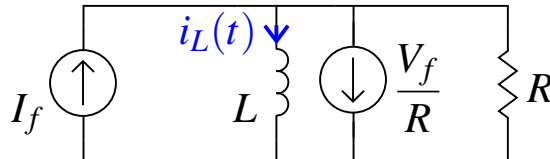
Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) En la red de la figura, V_f e I_f son constantes y la condición inicial es $i_L(0) = I_o$. Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$



Solución

Aplicando transformación de fuentes y combinando las fuentes de corriente en paralelo, se obtiene

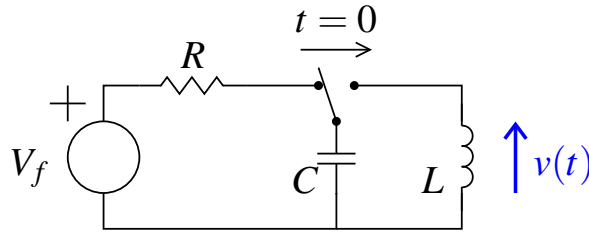


Entonces, dado que la fuente de corriente es constante, se puede escribir la solución de un circuito RL :

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} \\ i_L(\infty) &= I_f - \frac{V_f}{R} \\ i_L(0) &= I_o \\ \tau &= \frac{L}{R} \end{aligned}$$

Note que la corriente en $t \rightarrow \infty$ se obtiene considerando que, en estado estacionario, el inductor se comporta como un cortocircuito.

Problema 2.2 (10 puntos) En la red de la figura, V_f es constante. El interruptor ha estado conectado a la izquierda desde hace mucho tiempo ($t \rightarrow -\infty$) y se desplaza a la derecha en el instante $t = 0$. Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.



Solución

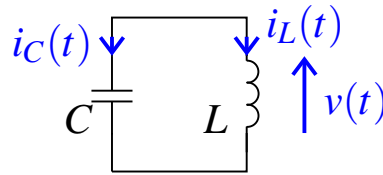
Si el interruptor ha estado a la izquierda desde $t \rightarrow -\infty$, se puede considerar que el circuito RC de la malla izquierda ha alcanzado el estado estacionario en $t = 0$. Por tanto, dado que la fuente es constante, el voltaje en el condensador es

$$v_C(0) = V_f$$

Note que, dado que la malla derecha se encuentra abierta antes de $t = 0$, se puede afirmar que

$$i_L(0) = 0$$

Cuando se cambia el interruptor de posición, se obtiene un circuito LC con las condiciones iniciales anteriores:



$$\begin{aligned} v &= L \frac{di_L}{dt} = -L \frac{di_C}{dt} = -LC \frac{d^2 v}{dt^2} \\ \Rightarrow LC \frac{d^2 v}{dt^2} + v &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación característica asociada es

$$LC\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

que corresponde a exponenciales complejas. Es decir, la solución general es

$$v(t) = A \cos(\omega_{LC} t) + B \sin(\omega_{LC} t) \quad ; \quad \omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene:

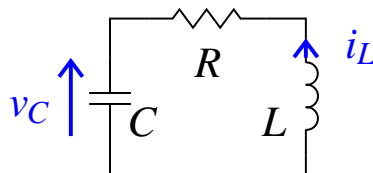
$$v(0) = A = V_f$$

$$i_L(0) = -i_C(0) = -C \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = B \omega_{LC} = 0$$

Por tanto,

$$v(t) = V_f \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$$

Problema 2.3 (10 puntos) En la red de la figura, $R = 1[k\Omega]$, $C = 4,7[\mu F]$, $L = 50[mH]$ y las condiciones iniciales son $i_L(0) = 100[mA]$ y $v_C(0) = 12[V]$. Determine la energía total disipada por la resistencia en el intervalo $[0, \infty)$.



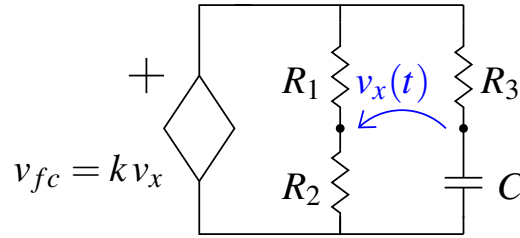
Solución

En el circuito, se produce un flujo de energía entre el condensador y el inductor y ésta va siendo disipada/absorbida por la resistencia.

Por tanto, la energía total disipada por la resistencia en el intervalo $[0, \infty)$ es la energía total almacenada inicialmente en el condensador e inductor. Es decir,

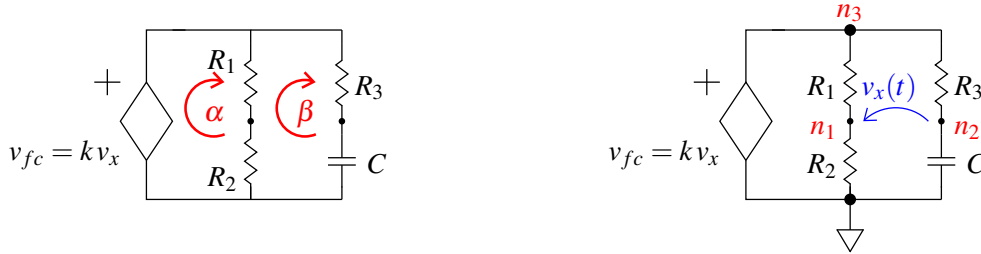
$$\begin{aligned} E_{Total}(0) &= \frac{1}{2}Cv_C^2(0) + \frac{1}{2}Li_L^2(0) \\ &= \frac{1}{2}4,7 \times 10^{-6} \times 12^2 + \frac{1}{2}50 \times 10^{-3} \times (0,1)^2 \\ &= \frac{1}{2}4,7 \times 1,44 \times 10^{-4} + \frac{1}{2}5 \times 10^{-4} \\ &= \frac{1}{2}(4,7 \times 1,44 + 5)10^{-4} \end{aligned}$$

Problema 2.4 (10 puntos) En la red de la figura, los datos son R_1 , R_2 , R_3 , C , k . Usando el método de voltajes de nodos o de corrientes de malla, plantee un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red.



Solución

La red puede analizarse aplicando el método de corrientes de malla o voltaje de nodos. En primer lugar, se definen las variables para cada uno de los métodos:



Corrientes de malla: Se hace LVK en cada una de las mallas y luego se agrega la ecuación de la fuente controlada en función de las corrientes de malla. De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & v_{fc} = (R_1 + R_2)(i_\alpha - i_\beta) \\ \beta : \quad & 0 = (R_1 + R_2)(i_\beta - i_\alpha) + R_3 i_\beta + \frac{1}{C} \int i_\beta d\tau \\ & v_{fc} = k v_x \\ & v_x = R_1(i_\beta - i_\alpha) + R_3 i_\beta \end{aligned}$$

que representa un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas $\{i_\alpha, i_\beta, v_{fc}, v_x\}$.

Voltajes de nodo: Se hace LVK en cada nodo y luego se agrega la ecuación de la fuente en función de los voltajes de nodo. Note que la fuente controlada corresponde a uno de los voltajes de nodo. De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned} n_1 : \quad & 0 = \frac{v_{n1} - v_{n3}}{R_1} + \frac{v_{n1}}{R_2} \\ n_2 : \quad & 0 = \frac{v_{n2} - v_{n3}}{R_3} + C \frac{dv_{n2}}{dt} \\ n_3 : \quad & v_{fc} = v_{n3} \\ & v_{fc} = k v_x \\ & v_x = v_{n1} - v_{n2} \end{aligned}$$

que representa un sistema de 5 ecuaciones y 5 incógnitas $\{v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, v_{fc}, v_x\}$.

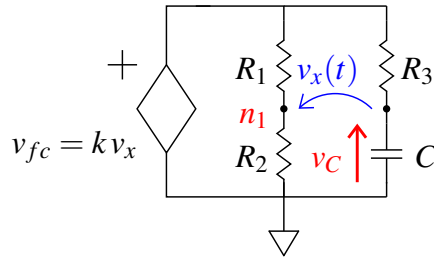
Problema 2.5 (10 puntos) Para la misma red del problema anterior, la fuente controlada se ha modificado, de manera que presenta la siguiente característica (no lineal):

$$v_{fc}(t) = \begin{cases} V_{cc} & ; v_x(t) > 0 \\ -V_{cc} & ; v_x(t) < 0 \end{cases}$$

en que $V_{cc} > 0$. Haga un gráfico del voltaje en el condensador para $t > 0$, suponiendo que el condensador se encuentra inicialmente descargado (puede suponer que $v_{fc}(0) = V_{cc}$). Justifique claramente su respuesta.

Solución

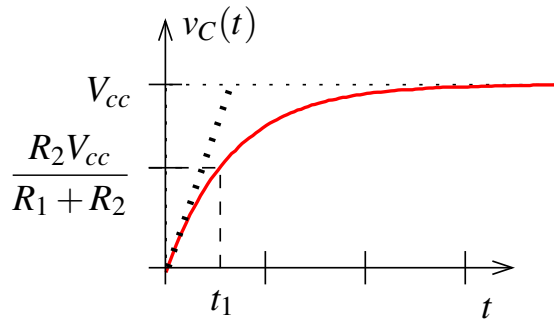
Inicialmente, en $t = 0$, se puede notar que v_x es la diferencia entre el voltaje en el nodo $n1$ (entre R_1 y R_2) y el voltaje en el condensador v_c .



Si $v_{fc}(0) = V_{cc}$ entonces $v_{n1}(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{cc}$. Dado que $v_c(0) = 0$, entonces $v_x > 0$ y por tanto la fuente controlada entrega $v_{fc} = V_{cc}$.

La pregunta es ¿hasta cuándo? Para esto se debe determinar si $v_x < 0$ en algún instante de tiempo, o lo que es lo mismo, cuándo el voltaje $v_c(t)$ supera $v_{n1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{cc}$.

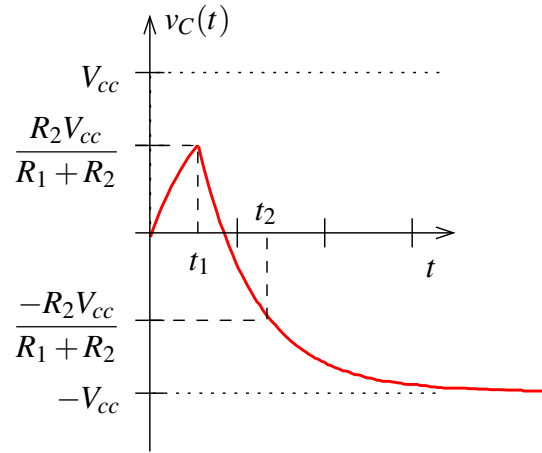
El voltaje en el condensador es $v_c(t) = v_c(\infty) + [v_c(0) - v_c(\infty)]e^{-t/\tau} = V_{cc}[1 - e^{-t/(R_3C)}]$. Gráficamente:



El instante t_1 se obtiene igualando:

$$V_{cc}[1 - e^{-t_1/(R_3C)}] = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{cc}$$

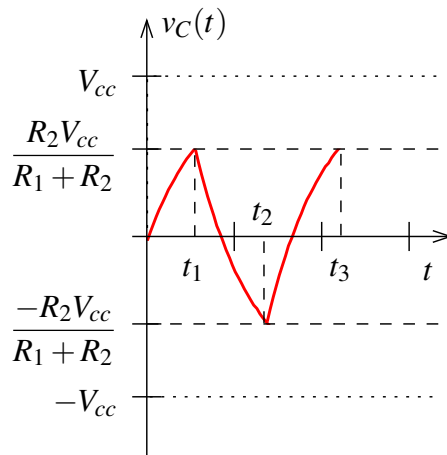
En cuanto se supera el instante t_1 el voltaje $v_x < 0$ y la fuente controlada cambia a $v_{fc} = -V_{cc}$. Por tanto ahora el condensador se descarga (o carga en sentido opuesto) intentando alcanzar $v_{fc} = -V_{cc}$. Es decir, para $t > t_1$, el voltaje $v_c(t) = -V_{cc} + [\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{cc} + V_{cc}]e^{-(t-t_1)/(R_3C)}$. Gráficamente:



El instante t_2 se obtiene igualando:

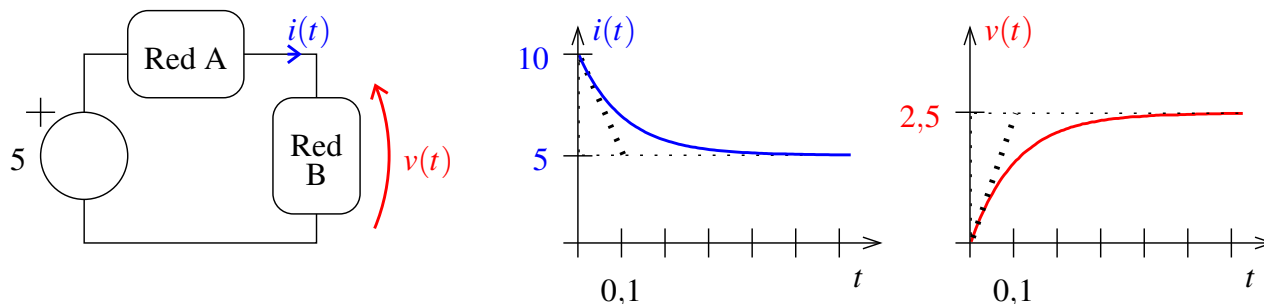
$$-V_{cc} + \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{cc} + V_{cc} \right] e^{-(t_2 - t_1)/(R_3 C)} = \frac{-R_2}{R_1 + R_2} V_{cc}$$

En cuanto se supera el instante t_2 el voltaje $v_x > 0$ y la fuente controlada vuelve a cambiar a $v_{fc} = V_{cc}$. Por tanto ahora el condensador se carga intentando alcanzar $v_{fc} = V_{cc}$. Es decir, para $t > t_2$, el voltaje $v_c(t) = V_{cc} + \left[\frac{-R_2}{R_1 + R_2} V_{cc} + V_{cc} \right] e^{-(t - t_2)/(R_3 C)}$. Gráficamente:



Note que, analizando para los siguientes intervalos se aprecia que la carga y descarga del condensador y, por ende, las conmutaciones de la fuente controlada se repiten periódicamente. En particular, $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots$

Problema 2.6 (10 puntos) En el circuito de la figura, la red A y la red B son pasivas, es decir, están formadas sólo por componentes R, L o C, y todas las condiciones iniciales son cero. Proponga una red A y una red B de manera que se obtengan las señales de voltaje y corriente que aparecen en los gráficos respectivos.



Solución

Las redes A y B pueden ser diseñadas observando las señales de voltaje y corriente en $t = 0$ y cuando $t \rightarrow \infty$.

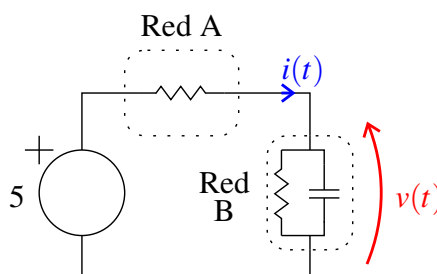
Se debe recordar que, para fuentes constantes, el condensador en estado estacionario (cuando $t \rightarrow \infty$) se comporta como circuito abierto y el inductor como cortocircuito.

Por otra parte, si las condiciones iniciales (en $t = 0$) son cero cuando se enciende la fuente, el condensador se comporta como cortocircuito y el inductor como circuito abierto.

Instante inicial $t = 0$: el voltaje en Red B es cero, por tanto equivale a un condensador, y la corriente es 10, por tanto la Red A equivale a una resistencia de $0,5[\Omega]$.

Estado estacionario cuando $t \rightarrow \infty$: el voltaje en Red B es 2,5 y la corriente es 5, por tanto también equivale a una resistencia de $0,5[\Omega]$. Note que el condensador antes mencionado ahora actúa como circuito abierto pues se ha cargado.

Por tanto se propone la siguiente red:

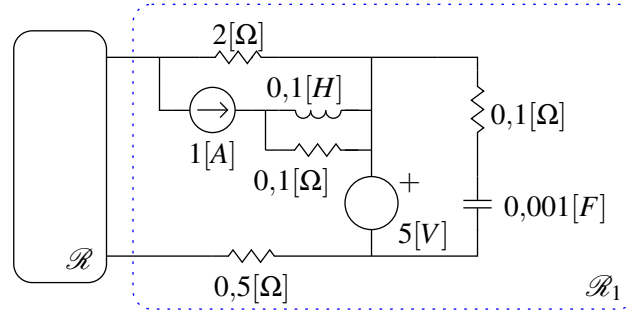


Ambas resistencias deben ser de $0,5[\Omega]$.

El valor del condensador se puede determinar a partir de la constante de tiempo de la red:

$$\tau = (R_1 \parallel R_2)C \Rightarrow 0,1 = 0,25C \Rightarrow C = 0,4$$

Problema 2.7 (10 puntos) En el circuito de la figura, determine la característica terminal de la red $\mathcal{R}_1$.



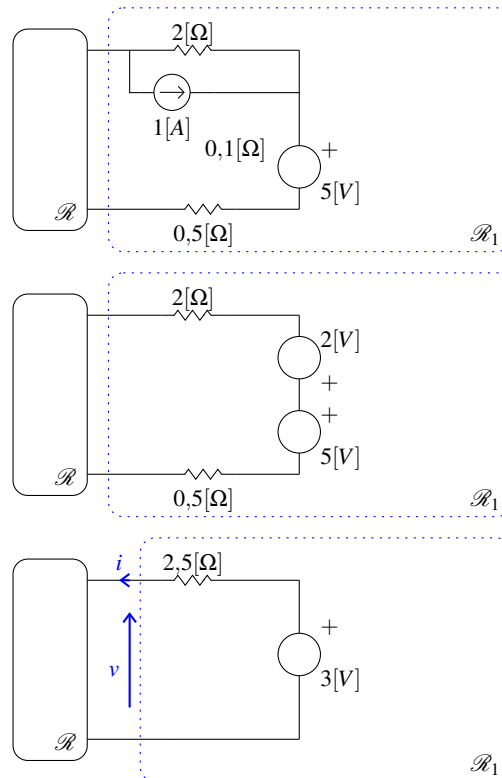
Solución

Antes de obtener la característica terminal es conveniente transformar la red dada (si es posible) de manera de obtener una red equivalente más simple.

Se puede observar que la rama RC de la derecha es redundante pues está en paralelo con la fuente de tensión.

Asimismo, el circuito RL (en el centro de la red $\mathcal{R}_1$), es redundante pues está en serie con la fuente de corriente.

De esta forma se obtiene una red sólo con dos resistencias y una fuente de corriente y una fuente de tensión la que se puede transformar aplicando el teorema de transformación de fuentes:



En la última red, se obtiene que la característica terminal es $v = 3 - 2,5i$