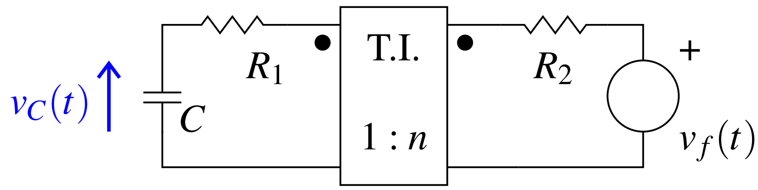
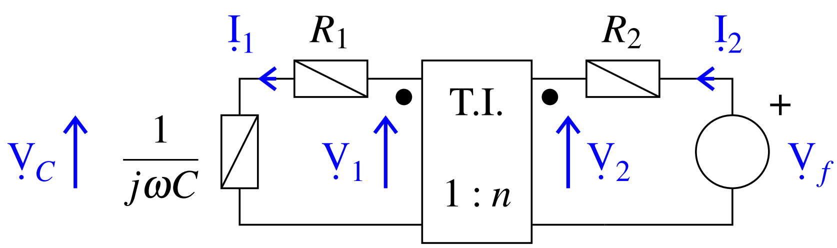
Certamen #3 – ELO102 – 1S 2013
Soluciones

Problema 3.1 (10 puntos) *En la red de la figura $v_f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Determine el voltaje en el condensador $v_C(t)$* ***en estado estacionario****.*



Solución

En el dominio de la transformada fasorial tenemos la red de la figura:



$$
\begin{aligned}
\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_1 &= \left(\frac{1}{j\omega C} + R_1\right)\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1 \\
\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_2 &= \underset{\cdot}{\mathrm{V}}_f - R_2\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_2 \\
\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_1 &= \frac{1}{n}\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_2 \\
\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1 &= n\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_2 \\
\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_C &= \frac{1}{j\omega C}\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1
\end{aligned}
$$

Reemplazando sucesivamente tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{j\omega C} + R_1\right)\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1 = \frac{1}{n}\left(\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_f - R_2\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_2\right) = \frac{1}{n}\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_f - \frac{1}{n^2}R_2\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1 \\
\Rightarrow \qquad &\left(\frac{1}{j\omega C} + R_1 + \frac{1}{n^2}R_2\right) j\omega C\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_C = \frac{1}{n}\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_f
\end{aligned}
$$

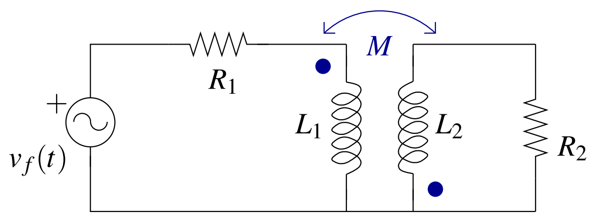
Finalmente, reemplazando $\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_f = \frac{A}{\sqrt{2}}\angle\phi$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\underset{\cdot}{\mathrm{V}}_C &= \frac{n\frac{A}{\sqrt{2}}\angle\phi}{n^2 + j\omega(n^2R_1 + R_2)C} \\
\Rightarrow \qquad v_C(t) &= \frac{nA\cos(\omega t + \phi - \arctan(\omega(R_1 + \frac{1}{n^2}R_2)C))}{\sqrt{n^4 + (\omega(n^2R_1 + R_2)C)^2}}
\end{aligned}
$$

Problema 3.2 (10 puntos) *En la red de la figura, los datos son*

$$\begin{array}{ll} R_1 = 2/3\ [\Omega] & R_2 = 3\ [\Omega] \\ L_1 = 1/10\ [H] & L_2 = 3/10\ [H] \\ M = 1/10\ [H] & v_f(t) = \sin(10t)\ [V] \end{array}$$

*Determine la potencia **activa** entregada por la fuente de voltaje.*

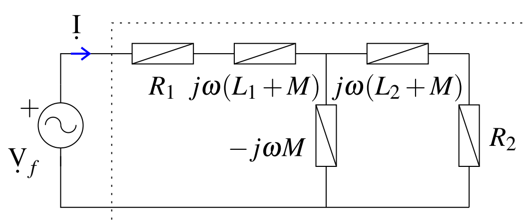


Solución

La potencia activa se puede obtener como la parte real de la potencia compleja aparente:

$$\underset{\cdot}{P} = \underset{\cdot}{V}_f \underset{\cdot}{I}^* = \frac{|\underset{\cdot}{V}_f|^2}{\underset{\cdot}{Z}^*_{eq}} = P_{ac} + jQ$$

Para obtener la impedancia equivalente de la red conectada a la fuente se puede usar la equivalencia "T" de los inductores acoplados:



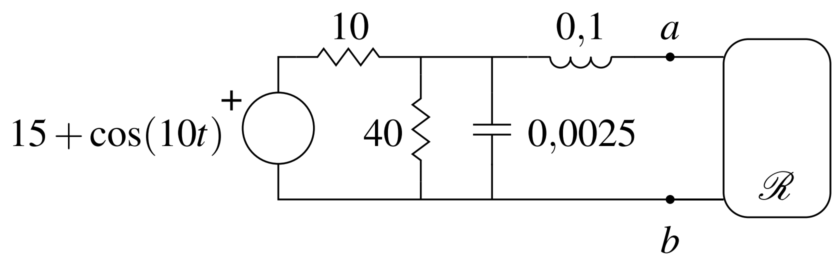
La impedancia equivalente es por lo tanto:

$$\begin{aligned} \underset{\cdot}{Z}_{eq} &= R_1 + j\omega(L_1+M) + (-j\omega M) \parallel (j\omega(L_2+M)+R_2) \\ &= \frac{2}{3} + j10\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{-1}{j10\frac{1}{10}} + \frac{1}{j10(\frac{3}{10}+\frac{1}{10})+3}\right)^{-1} \\ &= \frac{2}{3} + j2 + \left(j + \frac{1}{3+j4}\right)^{-1} = \frac{2}{3} + j2 + \frac{3+j4}{-3+j3} \\ &= \frac{2}{3} + j2 + \frac{(3+j4)(-3-j3)}{18} = \frac{5}{6} + j\frac{5}{6} = \frac{5}{6}\sqrt{2}\angle(\tfrac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\underset{\cdot}{P} = \frac{|\underset{\cdot}{V}_f|^2}{\underset{\cdot}{Z}^*_{eq}} = \frac{1}{2}\frac{6}{5\sqrt{2}}\angle(\tfrac{\pi}{4}) \quad \Rightarrow \quad P_{ac} = \Re\{\underset{\cdot}{P}\} = \frac{1}{2}\frac{6}{5\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{10}$$

Problema 3.3 (10 puntos) *En la red de la figura, determine la red Thévenin equivalente desde los terminales $a-b$ en estado estacionario*



Solución

El equivalente Thévenin está formado por una fuente de voltaje $e_T(t)$ y una red $\mathscr{R}_r$ en serie (sin fuentes independientes).

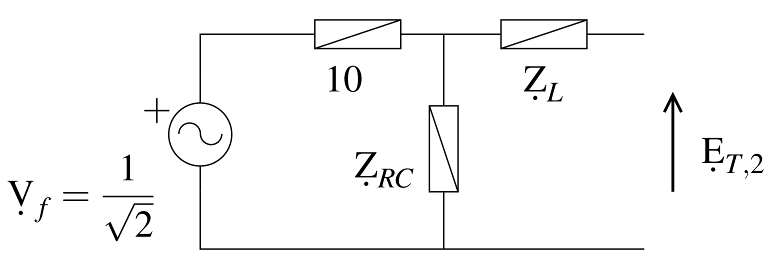
(a) Fuente de voltaje Thévenin se obtiene calculando el voltaje de circuito abierto en los terminales $a-b$.

Dado que la red dada tiene excitación de dos frecuencias diferentes, se debe aplicar superposición.

a) A la frecuencia $\omega = 0$ el condensador (en e.e.) se comporta como circuito abierto y el inductor como cortocircuito. Por ende, el voltaje de circuito abierto es el voltaje que aparece entre los terminales de la resistencia de $40[\Omega]$:

$$e_{T,1}(t) = 15\frac{40}{10+40} = 12[V]$$

b) A la frecuencia $\omega = 10$ se puede analizar el circuito en el dominio de la transformada fasorial:



en que

$$\underset{\cdot}{Z}_{RC} = (\tfrac{1}{R} + j\omega C)^{-1} = (\tfrac{1}{40} + j10\cdot 0{,}0025)^{-1} = (\tfrac{1}{40} + j\tfrac{1}{40})^{-1} = \tfrac{40}{\sqrt{2}}\angle(-\tfrac{\pi}{4}) = 20 - j20$$

Note que $\underset{\cdot}{Z}_L$ es redundante pues no circula corriente por ella. Por tanto:

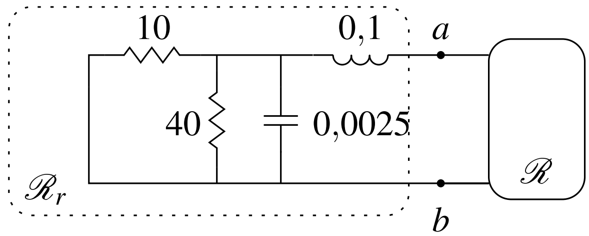
$$\underset{\cdot}{E}_{T,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\underset{\cdot}{Z}_{RC}}{\underset{\cdot}{Z}_{RC}+10} = \frac{20\angle(-\frac{\pi}{4})}{30-j20} = \tfrac{2}{\sqrt{13}}\angle(-\tfrac{\pi}{4} + \arctan(\tfrac{2}{3}))$$

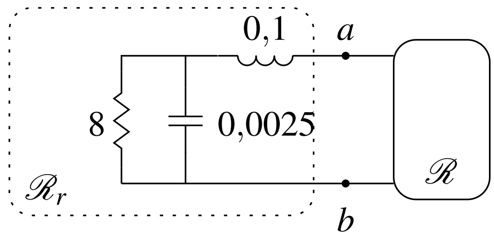
$$e_{T,2}(t) = \tfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}\cos(10t - \tfrac{\pi}{4} + \arctan(\tfrac{2}{3}))$$

Por tanto,

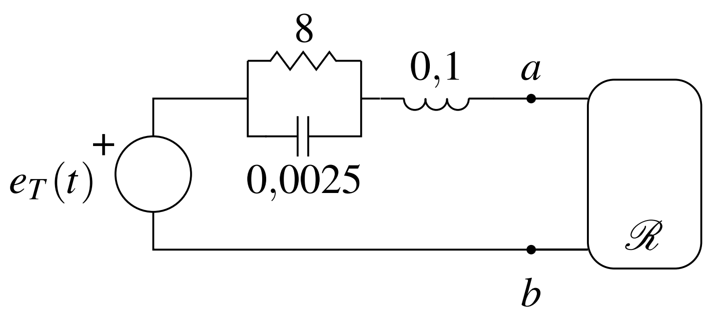
$$e_T(t) = e_{T,1}(t) + e_{T,2}(t) = 12 + \tfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}\cos(10t - \tfrac{\pi}{4} + \arctan(\tfrac{2}{3}))$$

(b) La red $\mathscr{R}_r$ se obtiene apagando la fuente de voltaje y simplificando la red usando equivalencias, es decir:

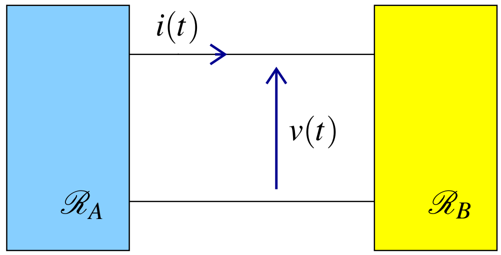




Finalmente, la red equivalente Thevenin es la de la figura:



Problema 3.4 (10 puntos) *En la interconexión de las redes de la figura se ha medido $v(t) = \hat{V}\cos(\omega t + \alpha)$ e $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$. Si $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{4}$, proponga una red $\mathscr{R}_A$ y una red $\mathscr{R}_B$ que correspondan a dicha situación y tal que sólo una de ellas contenga fuentes independientes. JUSTIFIQUE CLARAMENTE SU RESPUESTA.*



Solución

La impedancia equivalente **de la red** $\mathscr{R}_B$ es

$$\underset{\cdot}{Z}_B = \frac{\underset{\cdot}{V}}{\underset{\cdot}{I}} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}\angle(\alpha - \beta) = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}\angle(\tfrac{3\pi}{4})$$

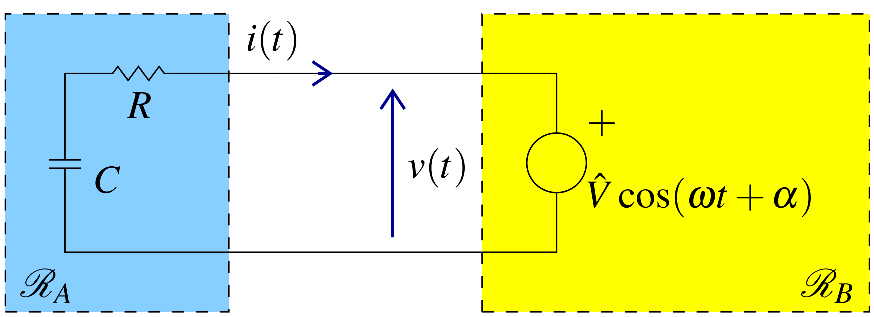
Si $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{4}$ entonces dicha impedancia está en el segundo cuadrante y, por ende, tiene parte real **negativa**. Esto indica que la red $\mathscr{R}_B$ **entrega** potencia en forma neta y, en consecuencia, la red $\mathscr{R}_A$ **absorbe** potencia en forma neta.

Por lo tanto, la red $\mathscr{R}_B$ puede elegirse como una fuente (independiente) de tensión $v_f(t) = v(t) = \hat{V}\cos(\omega t + \alpha)$.

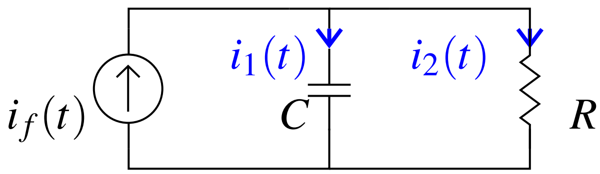
Para diseñar la red $\mathscr{R}_A$, obtenemos su impedancia equivalente:

$$\underset{\cdot}{Z}_A = -\frac{\underset{\cdot}{V}}{\underset{\cdot}{I}} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}\angle(\pi + \alpha - \beta) = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}\angle(\tfrac{7\pi}{4}) = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}\angle(\tfrac{-\pi}{4}) = \frac{\hat{V}}{\hat{I}\sqrt{2}} - j\frac{\hat{V}}{\hat{I}\sqrt{2}}$$

Esto indica que la impedancia equivalente pertenece al cuarto cuadrante. Una impedancia así se puede lograr con un circuito RC como en la figura, talque $R = \frac{1}{\omega C} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}\sqrt{2}}$



Problema 3.5 (10 puntos) *En la red de la figura se sabe que $i_f(t) = \sqrt{2}\cos(10t)$ y el factor de potencia (F.P.) desde los terminales de la fuente es $0{,}8$. Determine las* ***amplitudes*** *(en e.e.) de $i_1(t)$ e $i_2(t)$.*



Solución

Aplicando divisor de corrientes en el dominio de la transformada fasorial se obtiene:

$$\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1 = \frac{j\omega C}{j\omega C + \frac{1}{R}}\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_f \quad \Rightarrow \quad |\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1| = \frac{\omega C|\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_f|}{\sqrt{(\omega C)^2 + (\frac{1}{R})^2}} = \frac{|\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_f|}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega RC})^2}}$$

$$\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_2 = \frac{\frac{1}{R}}{j\omega C + \frac{1}{R}}\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_f \quad \Rightarrow \quad |\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_2| = \frac{\frac{1}{R}|\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_f|}{\sqrt{(\omega C)^2 + (\frac{1}{R})^2}} = \frac{|\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_f|}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

El F.P. es igual a $\cos\phi$, en que ϕ es el ángulo de la impedancia equivalente. Dado que $\cos\phi = \cos(-\phi)$, entonces también es el coseno del ángulo de la admitancia equivalente que ve la fuente:

$$\left.\begin{array}{r} \underset{\cdot}{\mathrm{Y}}_{eq} = j\omega C + \frac{1}{R} \\ \\ \cos\angle(-\phi) = 0{,}8 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \tan\angle(-\phi) = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4} = \omega RC$$

Por tanto, reemplazando este resultado y el hecho que $|\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_f| = 1$, tenemos que

$$|\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_1| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{4}{3})^2}} = \frac{3}{5}$$

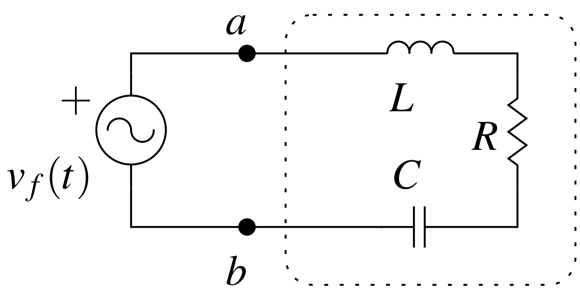
$$|\underset{\cdot}{\mathrm{I}}_2| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{3}{4})^2}} = \frac{4}{5}$$

Por tanto, la amplitud de $i_1(t)$ es $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ y la amplitud de $i_2(t)$ es $\frac{4}{5}\sqrt{2}$

Problema 3.6 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_f(t) = A\cos(\omega t)$*

(a) Demuestre que si $\omega = 1/\sqrt{LC}$, entonces la impedancia equivalente desde los terminales $a-b$ es puramente resistiva.

(b) Se afirma que si $\omega > 1/\sqrt{LC}$ entonces el factor de potencia (F.P) desde los terminales de la fuente es inductivo. Demuestre o refute la afirmación, JUSTIFICANDO CLARAMENTE SU RESPUESTA.



Solución

(a) La impedancia equivalente desde los terminales de la fuente es

$$\underset{\cdot}{Z}_{eq} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)$$

De la expresión obtenida es directo que si $\omega = 1/\sqrt{LC}$ entonces $\underset{\cdot}{Z}_{eq} = R$.

(b) Una forma de probar la afirmación es notando que

$$\omega > 1/\sqrt{LC} \quad \Rightarrow \quad \omega\sqrt{LC} > 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 LC > 1$$

Por tanto, la parte imaginaria de la impedancia equivalente es **positiva**, es decir, $\underset{\cdot}{Z}_{eq}$ está en el primer cuadrante. Esto corresponde a un F.P. inductivo. Por tanto la afirmación es verdadera.