ELO102 – S1 2013 – Control #9 – 6 de mayo de 2013

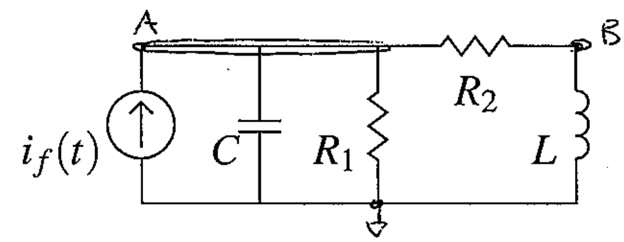
Basta que responda SOLO UNO de los dos problemas propuestos.
Indique claramente cuál de los dos responde.

Problema 9.1 *En la red de la figura, los datos son $i_f(t)$, R_1, R_2, C, L.*

(a) Usando el método de voltaje de nodos, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red.

(b) Determine una ecuación diferencial para el voltaje en el condensador.

(c) Si $i_f(t) = I_f$ es constante, determine el voltaje en el condensador cuando $t \to \infty$.



(a) Método de nodos: planteamos LCK en cada nodo y las incógnitas son los voltajes.

nodo A: $C\frac{dv_A}{dt} + \frac{v_A}{R_1} + \frac{v_A - v_B}{R_2} = i_f$

nodo B: $\frac{v_B - v_A}{R_2} + \frac{1}{L}\int v_B \, dt = 0$

2 ecuaciones
2 incógnitas

(b) Para obtener una ecuación para v_A, se debe eliminar v_B de la 1era ecuación en la 2da:

$$-i_f + C\frac{dv_A}{dt} + \frac{v_A}{R_1} + \frac{1}{L}\int \left[R_2\left(C\frac{dv_A}{dt} + \frac{v_A}{R_1} + \frac{v_A}{R_2} - i_f \right) \right] dt = 0 \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$C\frac{d^2 v_A}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2 C}{L} \right) \frac{dv_A}{dt} + \frac{R_2}{L}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_A = + \frac{di_f}{dt} + \frac{R_2}{L} i_f$$

(c) Si $i_f(t) = I_f$ $\Rightarrow$ v_A también es constante cuando $t \to \infty$ $\left.\frac{dv_A}{dt}\right|_\infty = 0$; $\left.\frac{d^2 v_A}{dt^2}\right|_\infty = 0$

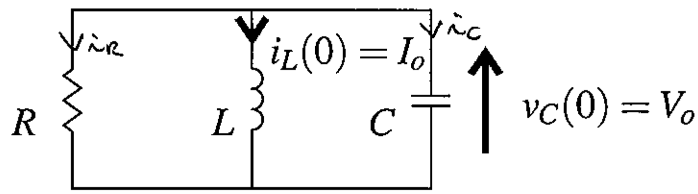
y $\frac{di_f}{dt} = 0$. En la Ec. dif: $0 + 0 + \frac{\cancel{R_2}}{\cancel{L}}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_A(\infty) = 0 + \frac{\cancel{R_2}}{\cancel{L}} I_f$

Nota: también puede obtenerse haciendo C = y L = $\longrightarrow$ $\boxed{v_A(\infty) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I_f}$

Problema 9.2 *Considere el circuito RLC de la figura en que los datos son $R = 0{,}1[k\Omega]$, $L = 0{,}1[H]$, $C = 10[\mu F]$ y las condiciones iniciales $i_L(0) = I_o = 1[mA]$ y $v_C(0) = V_o = 0[V]$.*

(a) *Haga un gráfico lo más preciso posible de la corriente por el inductor.*

(b) *Determine la energía total disipada por la resistencia en el intervalo $[0,\infty)$*



(a) Modelado:

$$i_R + i_L + i_C = 0 \rightarrow \frac{v_C}{R} + i_L + C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$v_C = R\, i_R$$

$$v_C = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0$$

$$i_L(0) = I_o$$

$$v_C(0) = L\frac{di_L}{dt}\Big|_0 = V_o$$

ecuación característica:

$$i_L(t) = e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow LC\lambda^2 + \frac{L}{R}\lambda + 1 = 0 \qquad RC = 1\ [ms]$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \qquad LC = 1\ \left[\frac{rad}{(ms)^2}\right]$$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

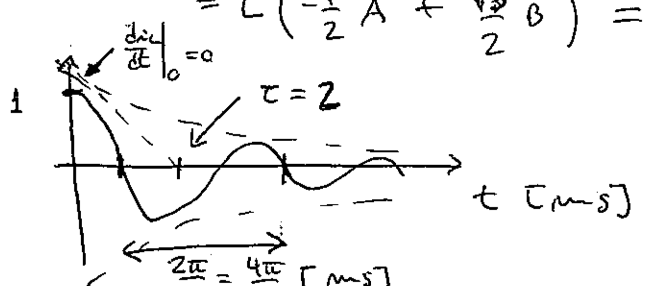
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = A\, e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\, e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$i_L(0) = A = 1$$

$$L\frac{di_L}{dt}(0) = L\left(A\left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] + B\left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$$

$$= L\left(-\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B\right) = 0 \Rightarrow B = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(b) Energía total es

$$E_T(0) = \frac{1}{2}L\,i^2(0) + \frac{1}{2}C\,v_C^2(0)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0.1\cdot 1^2\ [\mu J]$$