Certamen #1 – ELO102 – 1S 2014
Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *La respuesta $r(t) = T\langle x_o, e(t)\rangle$ de un sistema está definido por las ecuaciones*

$$\frac{dx}{dt} = e(t) \qquad ; x(0) = x_o$$
$$r(t) = x^2(t)$$

Determine si el sistema es lineal o no.

Solución

A partir de las ecuaciones se observa que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau = x_0 + \int_0^t e(\tau)d\tau$$

por tanto $r(t) = \left(x_0 + \int_0^t e(\tau)d\tau\right)^2$

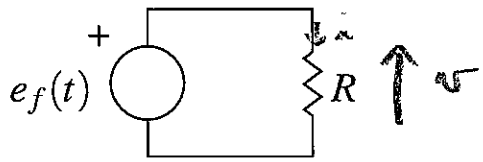
El sistema es no lineal pues, por ejemplo, no satisface homogeneidad en el estado:

$$T\langle \alpha x_0, 0\rangle = (\alpha x_0)^2 = \alpha^2 x_0^2 \neq \alpha x_0^2 = \alpha T\langle x_0, 0\rangle$$

Problema 1.2 (10 puntos) *En la red de la figura, la fuente entrega una señal de voltaje periódica, de período* $50[ms]$, *de valor medio* $1[V]$, *de valor efectivo* $2[V]$ *y máximo* $5[V]$. *Determine, si es posible,*

(a) *La potencia promedio absorbida por la resistencia R*

(b) *La corriente promedio por la resistencia R*



Solución

(a) la potencia promedio es

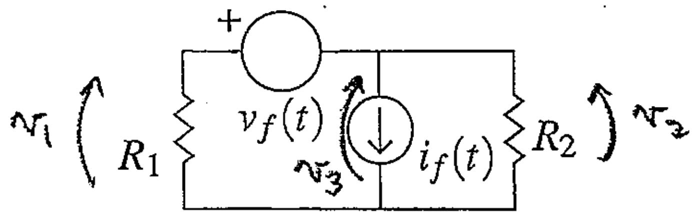
$$\overline{P_R} = \frac{1}{T}\int_0^T v\, i\, dt$$

$$= \frac{1}{R}\frac{1}{T}\int_0^T v^2\, dt = \frac{1}{R} v_{RMS}^2 = \frac{4}{R}$$

(b) la corriente promedio es

$$\bar{i} = \frac{1}{T}\int_0^T i\, dt = \frac{1}{R}\frac{1}{T}\int_0^T v\, dt = \frac{1}{R}\bar{v} = \frac{1}{R}$$

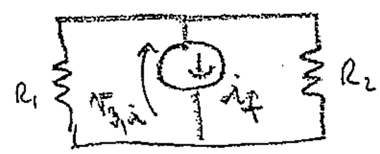
Problema 1.3 (10 puntos) *En la red de la figura los datos son* $R_1 = 1[\Omega]$, $R_2 = 2[\Omega]$, $i_f(t) = \cos(t)[A]$ *y* $v_f(t) = 3[V]$. *Determine la potencia instantánea entregada por la fuente de corriente.*



Solución

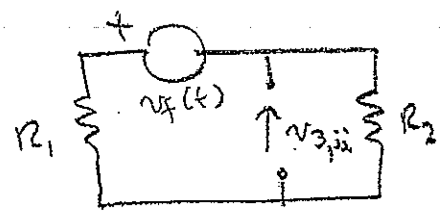
Para determinar la potencia entregada por la fuente usamos superposición para calcular $v_3(t)$

i) Si $v_f(t) = 0$



$$v_{3,i}(t) = -i_f(t) \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = -\frac{2}{3}\cos(t)$$

ii) Si $i_f(t) = 0$

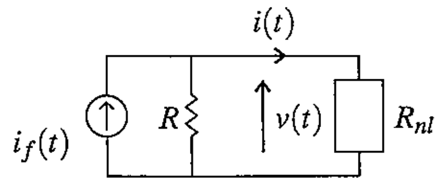


$$v_{3,ii}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(-v_f) = \frac{2}{3}(-3) = -2$$

Por tanto la potencia instantánea entregada por la fuente $i_f(t)$ es igual a: $p(t) = -v_3(t)\, i_f(t)$

$$= \left(+\frac{2}{3}\cos(t) + 2\right)\cos(t)$$

Problema 1.4 (10 puntos) *En la red de la figura el modelo de la resistencia no-lineal R_{nl} es $v(t) = K(e^{\beta i(t)} - 1)$, en que $\beta > 0$ y $K > 0$. La fuente de corriente es $i_f(t) = a\cos(\omega t)$, en que $0 < a << 1$. Determine una expresión aproximada para la corriente $i(t)$.*



Solución

El punto de operación determinado por $i_f(t)$ es cero.

Por tanto, para R_{nl} "linealizamos"/hacemos una aproximación en serie de Taylor en torno a

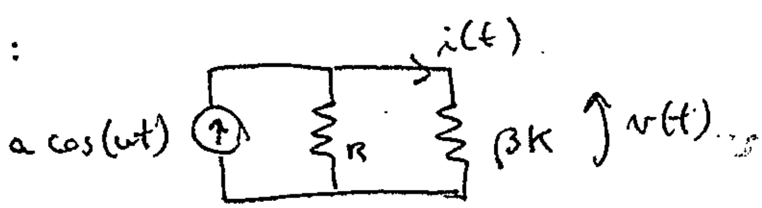
$$\begin{cases} i(t) = I_Q = 0 \\ v(t) = V_Q = 0 \end{cases}$$

$$v(t) \approx \cancel{V_Q}^{\,0} + \frac{dv}{di}\Big|_Q \left(i(t) - \cancel{I_Q}^{\,0}\right)$$

$$v(t) \approx \beta K \underbrace{e^{\beta \cancel{i}^{\,0}}\Big|_Q}\; i(t)$$

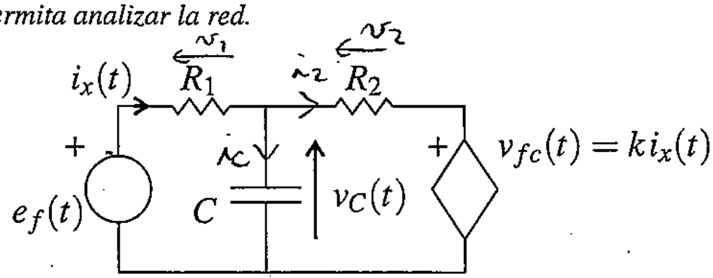
$$\Rightarrow v(t) \approx \beta K \cdot 1 \cdot i(t)$$

Por tanto el modelo de la red en torno a $(V_Q, I_Q) = (0,0)$ es:



¡Divisor de corriente! $\Rightarrow$ $i(t) = \dfrac{R\,a}{R+\beta K}\cos(\omega t)$

Problema 1.5 (10 puntos) *En la red de la figura, los datos son $e_f(t)$, R_1, R_2, C y k. Plantee un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red.*



Solución

incógnitas: i_x, i_c, i_2, v_1, v_2, v_c, v_{fc} } 7 incógnitas

LCK: $i_x - i_c - i_2 = 0$

LVK: $v_1 + v_c = e_f$

$v_c - v_2 - v_{fc} = 0$

III: $v_1 = R_1 i_x$

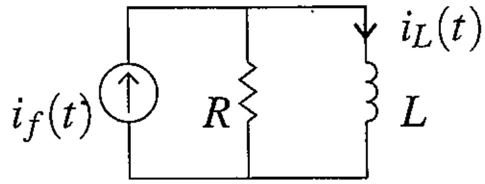
$v_2 = R_2 i_2$

$i_c = C \dfrac{dv_c}{dt}$

$v_{fc} = k i_x$

7 ecuaciones

Problema 1.6 (10 puntos) *En la red de la figura, los datos son $i_L(0) = 0$[mA], $R = 1$[kΩ], $L = 20$[mH] y la fuente es $i_f(t) = 50\,\mu(t)$[mA]. Determine la energía total absorbida por la resistencia en el intervalo $[0,\infty)$.*



Solución

Planteando ecuaciones para el circuito RL se llega a

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = i_f$$

La fuente es constante $i_f = 0{,}05 = 50$ [mA]

La constante de tiempo es $\frac{L}{R} = \frac{0{,}02}{1000} = 0{,}00002 = 20$ [μs]

Para $i_L(t) = i_L(\infty) + (\cancel{i_L(0)}^{0} - i_L(\infty))\, e^{-t/\tau}$ $\quad \tau = \frac{L}{R}$

$$= 0{,}05\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}00002}}\right)$$

Por tanto $i_R(t) = i_f(t) - i_L(t)$

$$= 0{,}05\, e^{-\frac{t}{0{,}00002}}$$

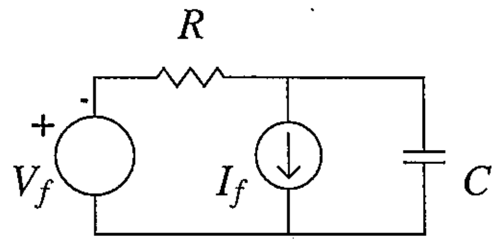
La potencia disipada es $p_R(t) = R\, i_R^2(t) = 2{,}5\, e^{-\frac{t}{0{,}00001}}$

y la energía es $E_R = \int_0^\infty p_R(t)\,dt = \int_0^\infty 2{,}5\, e^{-\frac{t}{0{,}00001}}\,dt$

$$= 2{,}5 \cdot 0{,}00001$$

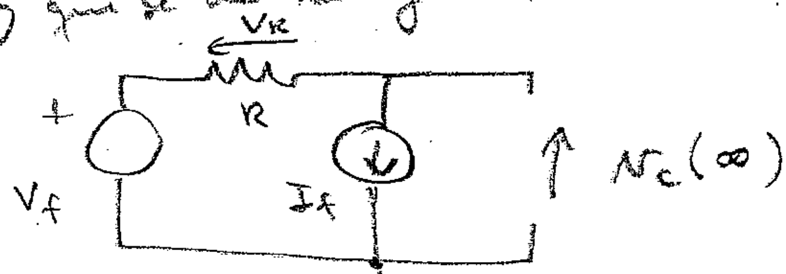
$$= 25\,[\mu J]$$

Problema 1.7 (10 puntos) *En la red de la figura ambas fuentes son constantes. Los datos son R, C, V_f, I_f. Determine el voltaje en el condensador en estado estacionario (es decir, cuando $t \to \infty$).*



Solución

En estado estacionario el condensador se comporta como un circuito abierto una vez que se ha cargado:



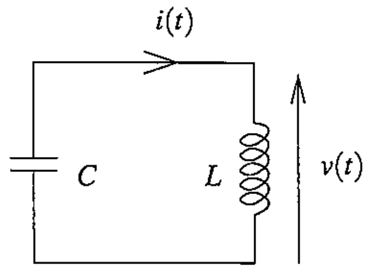
Por tanto, haciendo LVK debe cumplirse que

$$V_f = V_R + v_c(\infty)$$

$$V_f = I_f R + v_c(\infty)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_c(\infty) = V_f - R I_f}$$

Problema 1.8 (10 puntos) *En la red de la figura los datos son L, C, $i(0) = 0$, $v(0) = V_o$. Determine el valor efectivo de la corriente en el inductor.*



Solución

El circuito LC es un oscilador cuya frecuencia de oscilación es $\omega_{LC} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

La corriente por el inductor y el voltaje por el condensador son sinusoidales.

$$v(t) = A_1 \cos(\omega_{LC} t) + B_1 \operatorname{sen}(\omega_{LC} t)$$

$$i(t) = A_2 \cos(\omega_{LC} t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega_{LC} t)$$

Pero $v(0) = A_1 = V_0$

$i(0) = A_2 = 0$

Además $v(t) = L \dfrac{di}{dt} \Rightarrow \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{L} v(0)$

$$B_2 \omega_{LC} = \frac{V_0}{L}$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{V_0}{\omega_{LC} L}$$

$$\Rightarrow i_{RMS} = \frac{B_2}{\sqrt{2}} = \frac{V_0}{\omega_{LC} L \sqrt{2}}$$