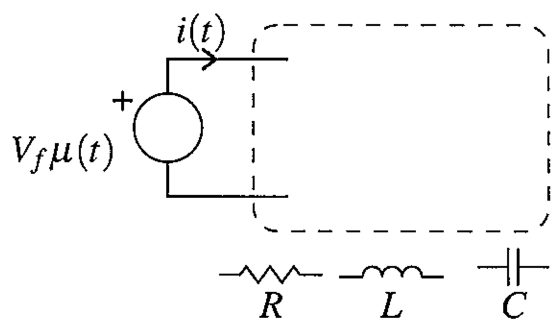
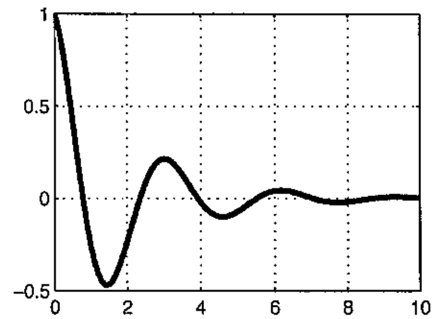
Certamen #2A – ELO102 – 1S 2014

Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) *En el circuito de la figura, la fuente de voltaje es un escalón en $t = 0$. Proponga una red RLC (con condiciones iniciales cero) tal que la corriente $i(t)$ entregada por la fuente sea como en la figura derecha. No es necesario calcular el valor de R, L o C, sólo proponer la interconexión. Fundamente claramente su respuesta.*





Solución

Se debe ver la corriente a $t = 0^+$ y a $t = \infty$

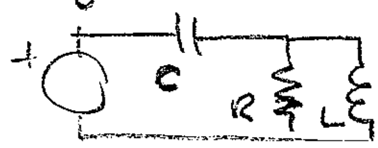
En $t \to \infty$, el inductor se comporta como un corto circuito y el condensador se comporta como un circuito abierto

En $t = 0^+$, el inductor se comporta como un circuito abierto y el condensador se comporta como un corto circuito

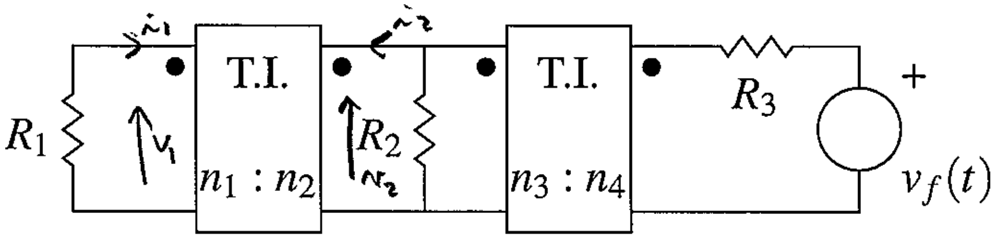
Del gráfico de corriente, se observa que en $t \to \infty$ la corriente es cero $\Rightarrow$ debe haber un condensador en serie

y en $t = 0^+$ la corriente es finita y distinta de cero $\Rightarrow$ la fuente "ve" una resistencia, por tanto el inductor está en paralelo.

Note que, para que haya oscilación amortiguada, debe haber (al menos) una resistencia, un inductor y un condensador

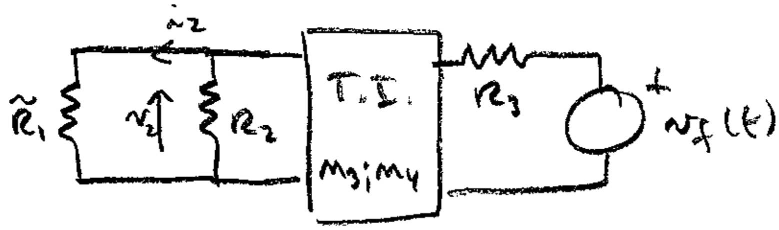
$\therefore$ 

Problema 2.2 (10 puntos) *En la red de la figura ambos transformadores son ideales. Determine ~~el voltaje por la resistencia R_1 y~~ la corriente entregada por la fuente de voltaje.*



Solución

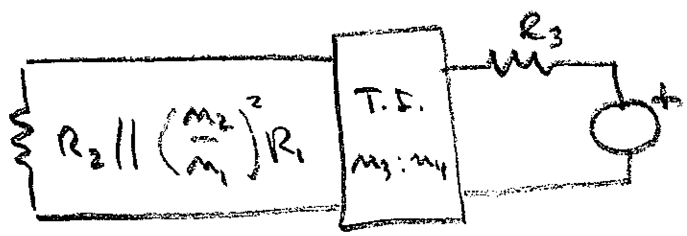
$\widehat{=}$



$$v_2 = \frac{n_2}{n_1} v_1 = -\frac{n_2}{n_1} R_1 i_1$$

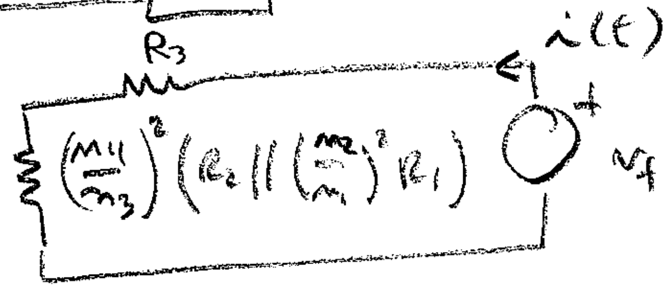
$$= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 R_1 i_2$$

$\widehat{=}$



(Análogamente)

$\widehat{=}$

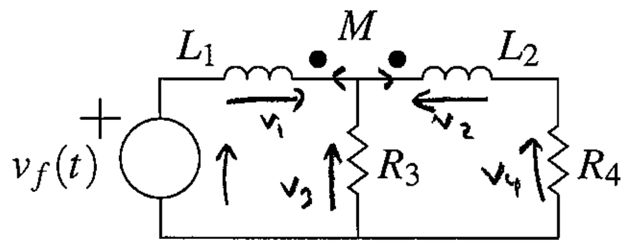


$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{v_f(t)}{R_{eq}}$$

en que $R_{eq} = R_3 + \left(\frac{n_4}{n_3}\right)^2 \left(R_2 \,\Big\|\, \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 R_1 \right)$

$$= R_3 + \left(\frac{n_4}{n_3}\right)^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{R_1 R_2}{R_2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 R_1}$$

Problema 2.3 (10 puntos) *En la red de la figura, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red.*



Solución

mallas

LVK en cada malla:

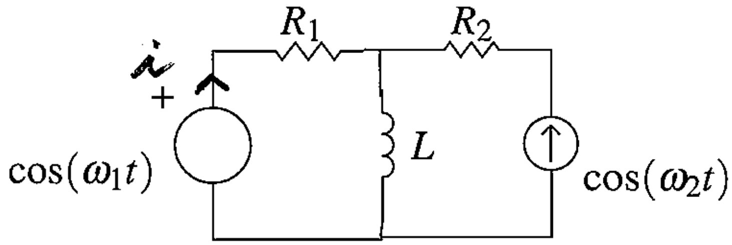
$$\boxed{\begin{aligned} v_f + v_1 + v_3 &= 0 \\ v_3 &= v_2 + v_4 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_f(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_3(i_1 + i_2) &= 0 \\ R_3(i_1 + i_2) &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_4 i_2 \end{aligned}}$$

//

$\omega_1 \neq \omega_2$

Problema 2.4 (10 puntos) *En la red de la figura, determine la potencia instantánea entregada por la fuente de voltaje.* en estado estacionario.



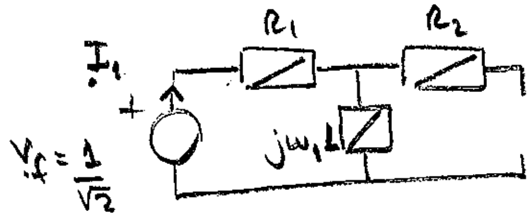
Solución

Se debe calcular i en estado estacionario.

Aplicamos superposición y transformada fasorial para cada caso

a) Para $\omega = \omega_1$

$(i_f = 0)$

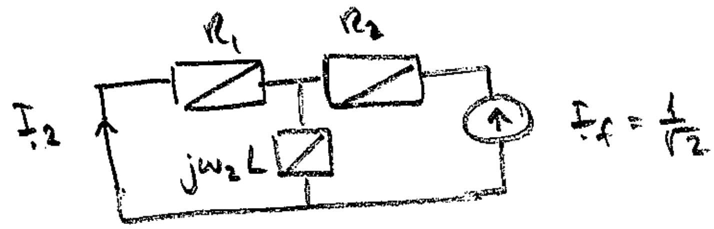


$$I_{1a} = \frac{V_f}{R_1 + j\omega_1 L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{R_1 + j\omega_1 L} \Rightarrow i_1(t) = \hat{A}_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega_1 L)^2}} \quad \phi_1 = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega_1 L}{R_1}\right)$$

b) Para $\omega = \omega_2$

$(v_f = 0)$



$$I_2 = \left(\frac{-j\omega_2 L}{R_1 + j\omega_2 L}\right) I_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-j\omega_2 L)}{R_1 + j\omega_2 L} \Rightarrow i_2(t) = \hat{A}_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\hat{A}_2 = \frac{\omega_2 L}{\sqrt{R_1^2 + (\omega_2 L)^2}}$$

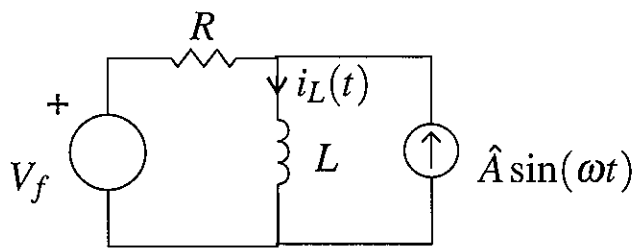
$$\phi_2 = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{\omega_2 L}{R_1}\right)$$

Finalmente,

$$p(t) = v_f(t)\, i(t) = v_f(t)\left(i_1(t) + i_2(t)\right)$$

$$= \cos(\omega_1 t)\left[\hat{A}_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \hat{A}_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)\right]$$

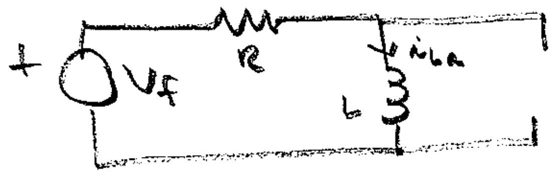
Problema 2.5 (10 puntos) *En el circuito de la figura determine la corriente por el inductor $i_L(t)$ en estado estacionario.*



Solución

Se puede aplicar superposición

a) Para frecuencia cero (fuente de voltaje constante y fuente de corriente apagada)

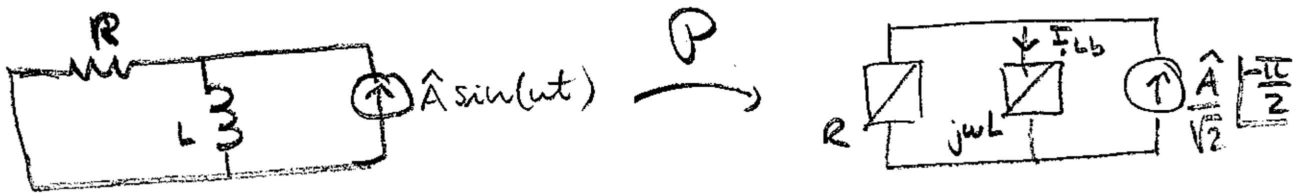


$i_f = 0$

En estado estacionario, el inductor es un corto circuito (de hecho, si $\omega = 0 \Rightarrow j\omega L = 0$)

$$\Rightarrow \quad i_{La}(t) = \frac{V_f}{R}$$

b) Para frecuencia ω (fuente de voltaje apagada)



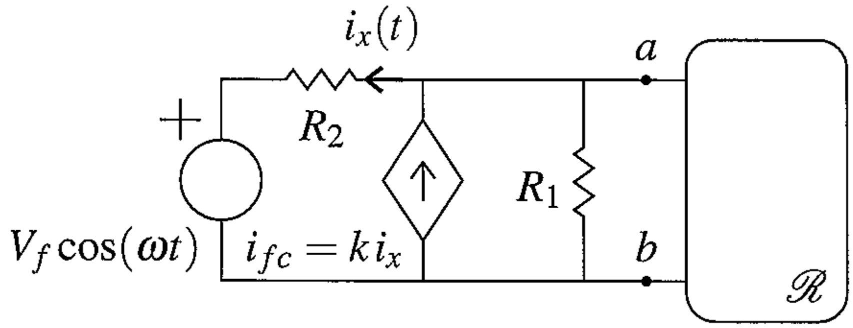
$$I_{Lb} = \left(\frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \angle -\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{R}{R + j\omega L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad i_{Lb}(t) = \frac{\hat{A}\,R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

Finalmente,

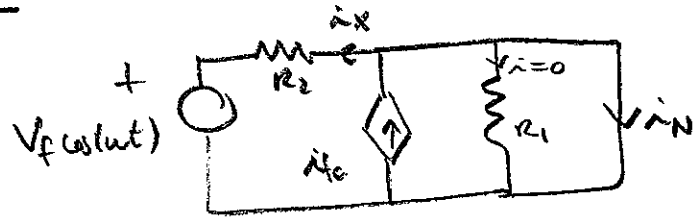
$$i(t) = \frac{V_f}{R} + \frac{\hat{A}R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

Problema 2.6 (10 puntos) *En la red de la figura, determine el equivalente Thevenin o Norton desde los terminales $a-b$.*



Solución

Norton: a) Corriente de corto circuito

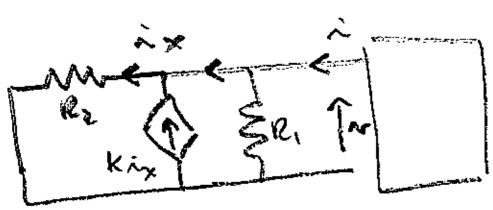


Note que $i_x = -\dfrac{V_f\cos(\omega t)}{R_2}$

Por tanto $i_N = i_{fc} - i_x = (k-1)\,i_x$

$= \dfrac{(1-k)\,V_f}{R_2}\cos(\omega t)$

b) Red relajada: se apagan fuentes independientes y se hacen cero las condiciones iniciales

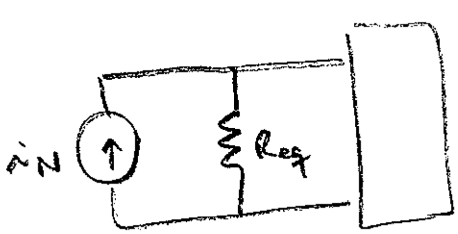


$i = \dfrac{v}{R_1} + i_x - k\,i_x$

pero $i_x = \dfrac{v}{R_2}$

$\therefore\; i = v\underbrace{\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{(1-k)}{R_2}\right)}_{\frac{1}{R_{eq}}}$

$\therefore$

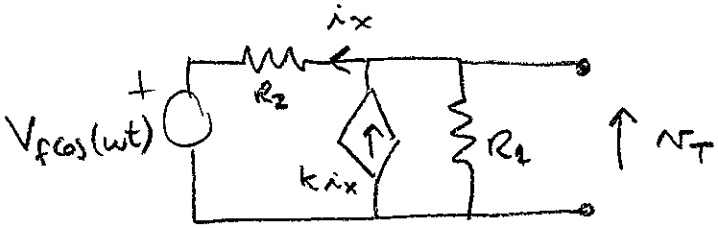


$R_{eq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_2 + (1-k)\,R_1}$

2.6 (alternativa)

Thevenin:

a) Voltaje de circuito abierto



$$v_T = R_1 (k i_x - i_x)$$

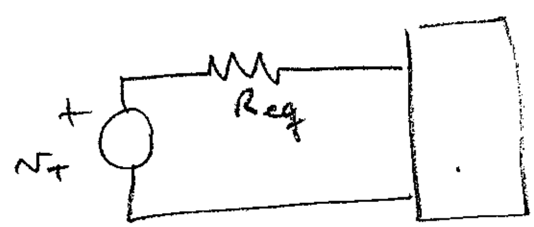
$$i_x = \frac{v_T - V_f \cos(\omega t)}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad v_T = \frac{R_1(k-1)}{R_2} v_T - \frac{R_1(k-1) V_f}{R_2} \cos(\omega t)$$

$$v_T = \frac{R_1 (1-k) V_f \cos(\omega t)}{R_2 + R_1(1-k)}$$

b) Red relajada: se calcula igual que para el equivalente Norton

∴

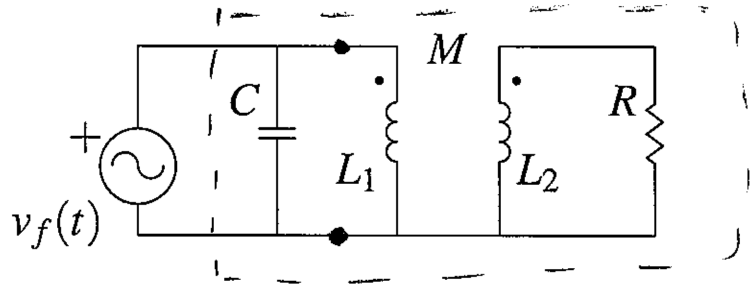


(*) Se puede verificar que

$$i_N R_{eq} = \frac{(1-k) V_f}{\cancel{R_2}} \cos(\omega t) \, \frac{R_1 \cancel{R_2}}{(R_2 + (1-k) R_1)} = v_T$$

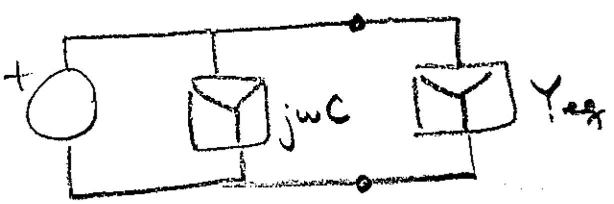
//

Problema 2.7 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_f(t) = \hat{A}\cos(\omega t)$. Determine el valor de C tal que la fuente sólo entrega potencia activa.*



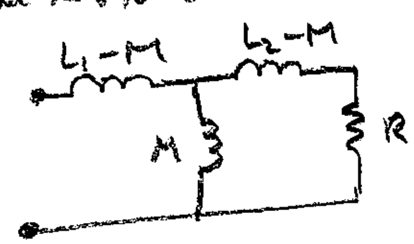
Solución

La fuente de voltaje entrega sólo potencia ACTIVA si la impedancia equivalente es puramente resistiva, si tiene ángulo cero o parte imaginaria igual a cero, o la admitancia equivalente es resistiva, ... todas estas condiciones son equivalentes

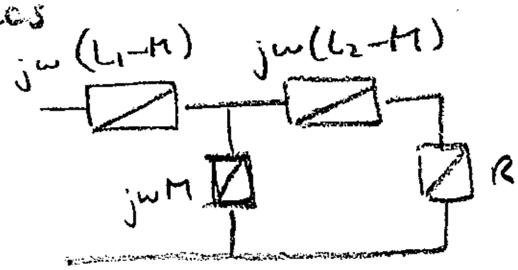


← Es necesario y suficiente que la parte imaginaria de Y_{eq} sea igual a $(-\omega C)$

Para obtener Y_{eq} (o Z_{eq}) usamos el equivalente T de los inductores acoplados



$\hat{=}$



$$Z_{eq} = j\omega(L_1-M) + j\omega M \,//\, (R + j\omega(L_2-M))$$
$$= j\omega(L_1-M) + \frac{j\omega M(R+j\omega(L_2-M))}{R + j\omega L_2}$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{R+j\omega L_2}{[j\omega(L_1-M)][R+j\omega L_2] + j\omega M[R+j\omega L_2] + \omega^2 M^2}$$
$$= \frac{R+j\omega L_2}{j\omega L_1(R+j\omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

$$\therefore \quad Y_{eq} = \frac{R + j\omega L_2}{\omega^2(M^2 - L_1L_2) + j\omega L_1 R}$$

$$= \frac{(R + j\omega L_2)\left[\omega^2(M^2 - L_1L_2) - j\omega L_1 R\right]}{\left[\omega^2(M^2 - L_1L_2)\right]^2 + \left[\omega L_1 R\right]^2}$$

La parte imaginaria es

$$\mathrm{Im}(Y_{eq}) = \frac{\omega^{2} L_2 (M^2 - L_1L_2) - \cancel{\omega} L_1 R^2}{\omega\left[\omega^2(M^2 - L_1L_2)^2 + (L_1R)^2\right]}$$

$$= -\omega C$$

$$\therefore \quad C = \frac{L_1R^2 - \omega^2 L_2 (M^2 - L_1L_2)}{\omega^2\left[\omega^2(M^2 - L_1L_2)^2 + (L_1R)^2\right]}$$