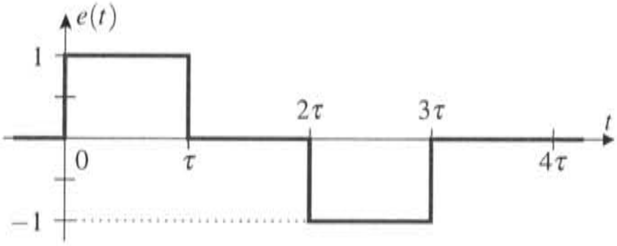
Certamen #1 – ELO102 – S1 2015

Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo es $r(t) = T\langle x(t_0) = x_o, e(t)\rangle$ para $t \geq t_0$. Se sabe que $T\langle x(0) = 0, \delta(t)\rangle = Ae^{-t/\tau}\mu(t)$, en que $A > 0$ y $\tau > 0$.*

Determine y grafique la respuesta del sistema cuando la excitación $e(t)$ es como en la figura y el estado inicial es cero.



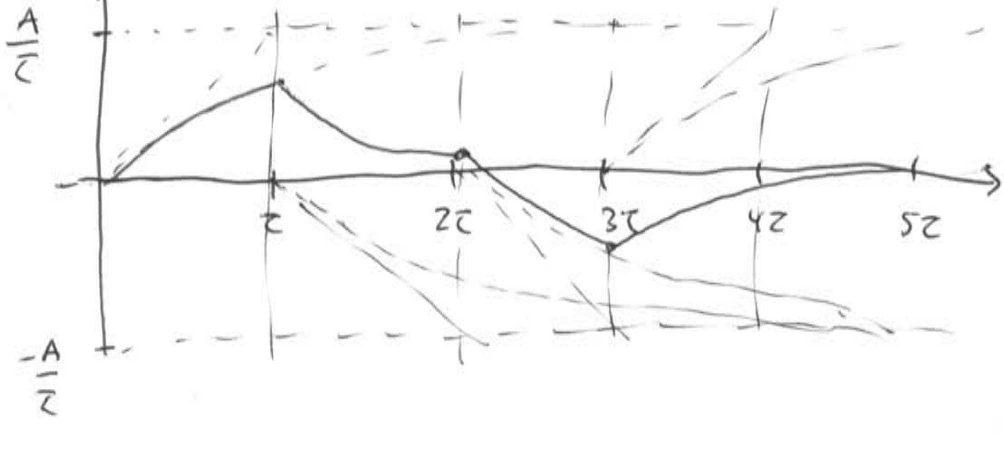
Solución

El sistema es LIT $\Rightarrow$ Si $T\langle 0, \delta(t)\rangle = A\, e^{-t/\tau}\mu(t)$

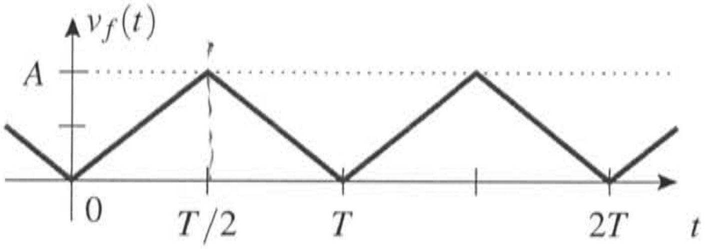
$$\Rightarrow T\langle 0, \mu(t)\rangle = \int_0^t A e^{-\eta/\tau} d\eta = \frac{A}{\tau}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\mu(t)$$

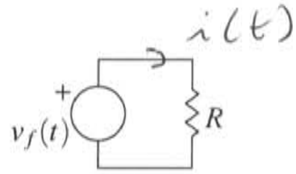
$$e(t) = \mu(t) - \mu(t-\tau) - \mu(t-2\tau) + \mu(t-3\tau)$$

$$\Rightarrow T\langle 0, e(t)\rangle = \frac{A}{\tau}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\mu(t) - \frac{A}{\tau}\left(1-e^{-(t-\tau)/\tau}\right)\mu(t-\tau)$$
$$-\frac{A}{\tau}\left(1-e^{-(t-2\tau)/\tau}\right)\mu(t-2\tau)$$
$$+\frac{A}{\tau}\left(1-e^{(t-3\tau)/\tau}\right)\mu(t-3\tau)$$



Problema 1.2 (10 puntos) *En la red de la figura, determine la potencia promedio entregada por la fuente.*





Solución

La potencia entregada por la fuente

$$p(t) = v_f(t) \cdot i(t) = \frac{v_f^2(t)}{R}$$

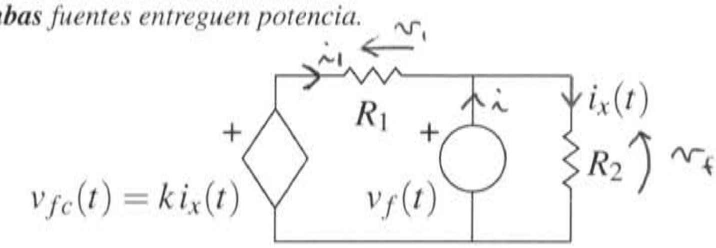
$$\Rightarrow \bar{p} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T v_f^2(t)\,dt}{R} = \frac{v_{RMS}^2}{R} \quad \text{potencia promedio}$$

$$v_{RMS}^2 = 2\,\frac{1}{T}\int_0^{T/2}\left(\left(\frac{A}{T/2}\right)t\right)^2 dt = \frac{2}{T}\cdot\frac{4A^2}{T^2}\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{T/2}$$

$$= \frac{A^2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{p} = \frac{A^2}{3R}}$$

Problema 1.3 (10 puntos) *En la red de la figura los datos son $R_1, R_2, v_f(t)$. Determine condiciones sobre $k > 0$ para que **ambas** fuentes entreguen potencia.*



Solución

Ecuaciones de análisis

LCK: $i_1 + i = i_x$

LVK: $v_{fc} = v_1 + v_f$

III: $v_{fc} = k\,i_x$

$v_1 = R_1 i_1$

$v_f = R_2 i_x$

incógnitas son $\{i, i_1, i_x, v_{fc}, v_1\}$

Resolviendo: $i_x = \dfrac{v_f}{R_2}$

$$\Rightarrow v_{fc} = \frac{k\,v_f}{R_2}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_{fc} - v_f = \frac{(k-R_2)}{R_2} v_f$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{(k-R_2)}{R_1 R_2} v_f$$

$$\Rightarrow i = i_x - i_1 = \frac{(R_1 + R_2 - k)}{R_1 R_2} v_f$$

Potencia entregada por v_{fc}:

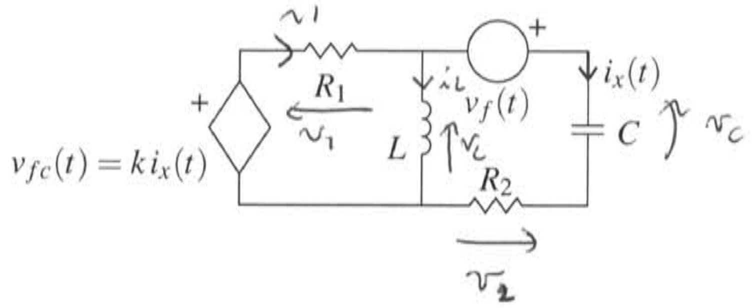
$$P_{v_{fc}} = v_{fc} \cdot i_1 = \frac{k(k-R_2)\,v_f^2}{R_1 R_2^2} > 0 \Rightarrow \boxed{k > R_2} \text{ (pues } k>0)$$

Potencia entregada por v_f:

$$P_{v_f} = v_f \cdot i = \frac{(R_1 + R_2 - k)\,v_f^2}{R_1 R_2} > 0 \Rightarrow \boxed{k > R_1 + R_2}$$

$\therefore$ Para que ambas fuentes entreguen potencia es necesario (y suficiente) que $\boxed{k > R_1 + R_2}$

Problema 1.4 (10 puntos) *En la red de la figura, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red..*



Solución

LCK: $i_1 = i_L + i_x$

LVK: $v_{fc} = v_1 + v_L$

$v_f = v_c + v_2 - v_L$

III: $v_{fc} = k\,i_x$

$v_1 = R_1\,i_1$

$v_L = L\,\dfrac{di_L}{dt}$

$i_x = C\,\dfrac{dv_c}{dt}$

$v_2 = R_2\,i_x$

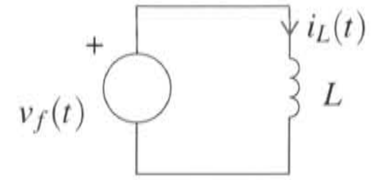
8 ecuaciones

8 incógnitas: i_1, i_L, i_x

$v_{fc}, v_1, v_L, v_2, v_c$

Problema 1.5 (10 puntos) *Considere la red de la figura en que $i_L(0) = I_o > 0$ y $v_f(t) = r(t) - 2r(t-T) + r(t-2T)$, en que $r(t)$ es la función rampa unitaria. Los datos son L, I_o, T.*

Determine el cambio de energía instantánea almacenada en el inductor entre $t = 0$ y $t \to \infty$.



Solución

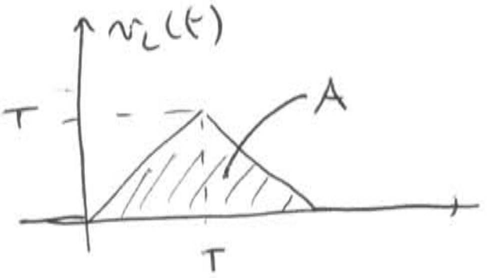
La energía instantánea del inductor depende de la corriente

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{[0,\infty)} = \frac{1}{2} L\, i_L^2(\infty) - \frac{1}{2} L\, i_L^2(0)$$

En que $i_L(0) = I_o$

y $\quad i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \quad i_L(\infty) = i_L(0) + \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^\infty v_L(\tau)\,d\tau}_{A}$

en que



$$\Rightarrow \quad A = T^2$$

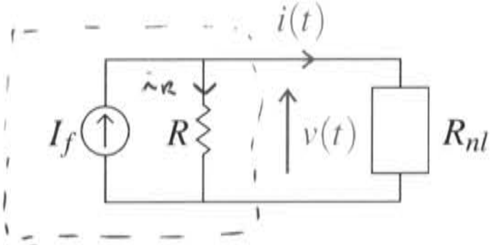
$$\Rightarrow \quad \Delta E_{[0,\infty)} = \frac{1}{2} L \left(I_o + \frac{1}{L} T^2 \right)^2 - \frac{1}{2} L\, I_o^2$$

$$= I_o T^2 + \frac{1}{2} \frac{T^4}{L}$$

Problema 1.6 (10 puntos) *En la red de la figura, la fuente de corriente es constante, $I_f = 5[A]$, $R_i = 1[\Omega]$ y la resistencia no-lineal R_{nl} satisface*

$$v(t) = \begin{cases} i^2(t) & ; i(t) \geq 0 \\ -i^2(t) & ; i(t) \leq 0 \end{cases}$$

Determine la corriente $i(t)$



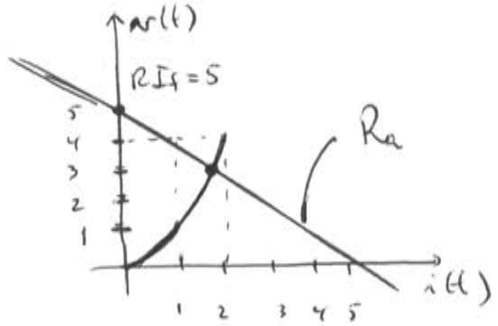
R_a

Solución

Para R_a:

$$\left.\begin{aligned} I_f &= i_R + i \\ v &= R i_R \end{aligned}\right\} \quad v(t) = R I_f - R\, i(t)$$

Para R_{nl}: $v = i^2$ si $i \geq 0$



La solución se ve gráficamente pero también puede obtenerse analíticamente:

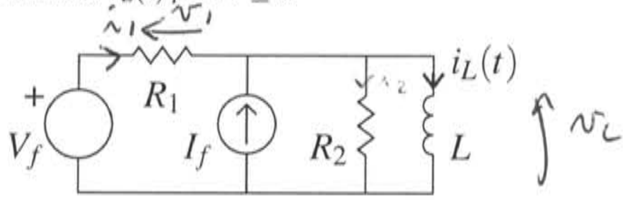
$$i^2 = \underbrace{R I_f} - R\, i$$

$$i^2 = 5 - i \Rightarrow i^2 + i - 5 = 0$$

$$i = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 5} \underset{i>0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} \approx \underline{\underline{1.7}}$$

Problema 1.7 (10 puntos) *En la red de la figura, el inductor se encuentra inicialmente descargado y ambas fuentes son constantes.*

Determine la corriente por el inductor $i_L(t)$ para $t \geq 0$.



Solución

Buscamos la EDO para $i_L(t)$

LCK : $i_1 + I_f = i_2 + i_L$

LVK : $V_f = v_1 + v_L$

III : $v_1 = R_1 i_1$

$v_L = R_2 i_2$

$v_L = L \frac{di_L}{dt}$

i_1, i_2, i_L

v_1, v_L

$$\frac{v_1}{R_1} + I_f = \frac{v_L}{R_2} + i_L$$

$$\frac{V_f - v_L}{R_1} + I_f = \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt} + i_L$$

$$\frac{V_f}{R_1} + I_f = \underbrace{L\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}_{\tau} \frac{di_L}{dt} + i_L$$

$\Rightarrow i_L(t) = i_L(\infty) + (i_L(0) - i_L(\infty))\, e^{-t/\tau}$

en que $i_L(0) = 0$ e $i_L(\infty)$ se obtiene reemplazando en la EDO:

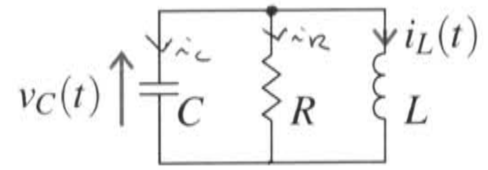
$$\tau = \frac{L}{R_1 // R_2}$$

$$i_L(\infty) = \frac{V_f}{R_1} + I_f$$

$\Rightarrow i_L(t) = \left(\frac{V_f}{R} + I_f\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

Problema 1.8 (10 puntos) *En la red de la figura los datos son $R = 1[k\Omega]$, $L = 1[H]$, $C = 1[\mu F]$, $i_L(0) = -1[A]$ y $v(0) = 0[V]$.*

Determine la corriente por el inductor $i_L(t)$ para $t \geq 0$.



Solución

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{LCK}: & & i_c + i_R + i_L = 0 \\ \text{III}: & & i_c = C \dfrac{dv_c}{dt} \\ & & i_R = \dfrac{v_c}{R} \\ & & i_L = \dfrac{1}{L}\int v_c \, d\tau \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R} + \frac{1}{L}\int v_c \, d\tau = 0 \qquad \Big/ \frac{1}{C}\frac{d}{dt}$$

con el tiempo en [ms]

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{RL} v_c = 0$$

$$v_c = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{1}\lambda + \underbrace{\frac{1}{RL}}_{1} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} j\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow v_c(t) = \left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] e^{-\frac{1}{2}t} \qquad t \text{ en [ms]}$$

y también $i_L(t) = \left[\tilde{A}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \tilde{B}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] e^{-\frac{1}{2}t}$

y las condiciones iniciales son $i_L(0) = \boxed{-1 = \tilde{A}}$

$$v_c(0) = L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

$$L\frac{di}{dt} = -\tilde{A}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t} - \tilde{A}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t} + \tilde{B}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t} - \tilde{B}\frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$L\frac{di}{dt}\Big|_0 = -\tilde{A}\frac{1}{2} + \frac{\tilde{B}\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \tilde{B} = \frac{\tilde{A}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow i_L(t) = \left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{1}{2}t}$$