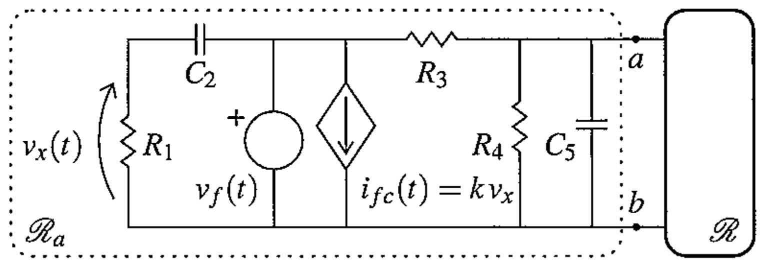
Certamen #2 – ELO102 – S1 2015

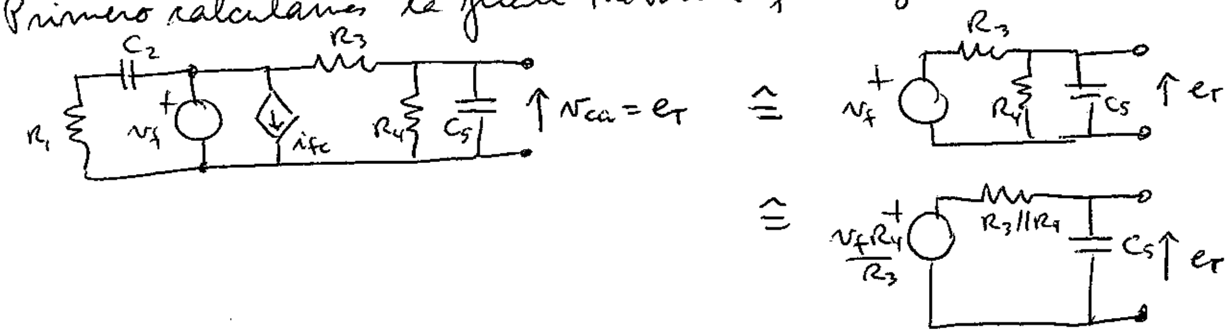
Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) *En la red de la figura, la condición inicial en ambos condensadores es cero y la fuente independiente de voltaje es $v_f(t) = V_f\mu(t)$. Determine el equivalente Thevenin desde los terminales $a-b$.*



Solución

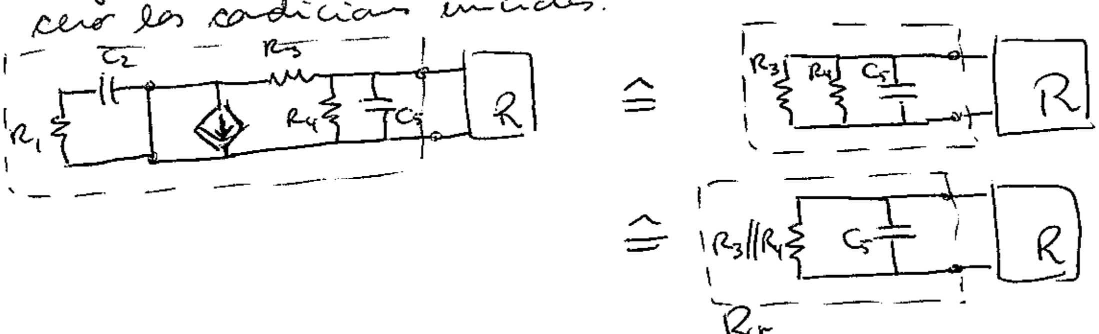
1) Primero calculamos la fuente Thévenin que es igual al voltaje de circuito abierto



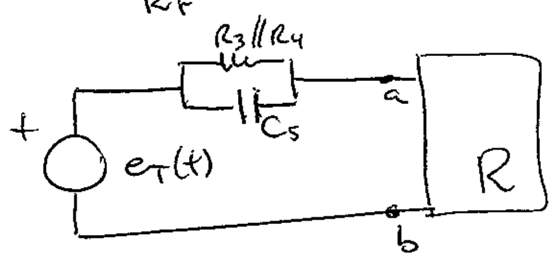
$$\Rightarrow e_T(t) = \frac{V_f R_4}{R_3}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\mu(t)$$

$$\tau = (R_3 // R_4)C$$

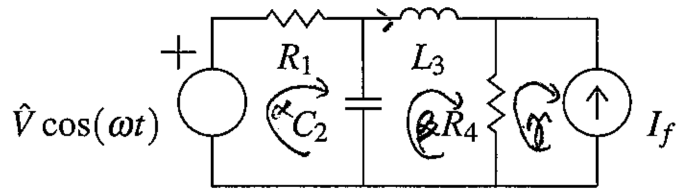
2) La red relajada se obtiene apagando las fuentes independientes y haciendo cero las condiciones iniciales.



∴ El equivalente Thévenin es como en la figura



Problema 2.2 (10 puntos) *En la red de la figura la fuente de voltaje es sinusoidal y la fuente de corriente es constante, determine ecuación diferencial que satisface la corriente por el inductor L_3.*



Solución

Para obtener la EDO de i_β usamos corrientes de malla.

LVK en cada malla:

$$R_1 i_\alpha + \frac{1}{C} D^{-1}(i_\alpha - i_\beta) = \hat{V}\cos(\omega t)$$

$$\frac{1}{C} D^{-1}(i_\beta - i_\alpha) + L D i_\beta + R_4 (i_\beta - i_\gamma) = 0$$

$$i_\gamma = -I_f$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{C} D^{-1} & -\frac{1}{C} D^{-1} \\ -\frac{1}{C} D^{-1} & L D + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V}\cos(\omega t) \\ -R_4 I_f \end{bmatrix}$$

$$i_\beta = \frac{\det\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{C} D^{-1} & \hat{V}\cos(\omega t) \\ -\frac{1}{C} D^{-1} & -R_4 I_f \end{bmatrix}}{\left(R_1 + \frac{1}{C} D^{-1}\right)(L D + R_4) - \frac{1}{C} D^{-2}} = \frac{\left(R_1 + \frac{1}{C} D^{-1}\right)(-R_4 I_f) + \frac{1}{C} D^{-1}\left(\hat{V}\cos(\omega t)\right)}{R_1 L D + R_1 R_4 + \frac{L}{C} + \frac{R_4}{C} D^{-1}}$$

$$\Rightarrow \left[R_1 L D^2 + \left(R_1 R_4 + \frac{L}{C}\right) D + \frac{R_4}{C}\right] i_\beta = \left(-R_1 R_4 D - \frac{R_4}{C}\right) I_f + \frac{\hat{V}}{C}\cos(\omega t)$$

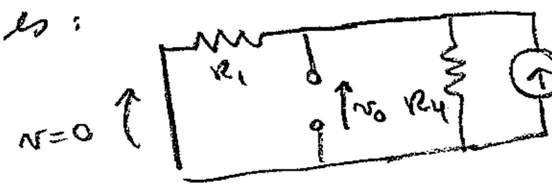
$$R_1 L \frac{d^2}{dt^2} i_\beta + \left(R_1 R_4 + \frac{L}{C}\right)\frac{d}{dt} i_\beta + \frac{R_4}{C} i_\beta = -R_1 R_4 \frac{d}{dt}(I_f) - \frac{R_4}{C} I_f + \frac{\hat{V}}{C}\cos(\omega t)$$

Problema 23 (10 puntos) *En la red de la figura anterior, determine el voltaje en el condensador C_2 en estado estacionario.*

Solución

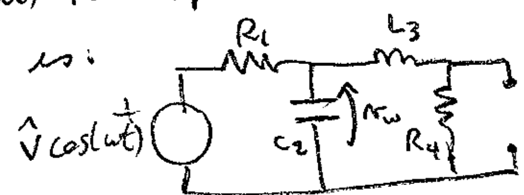
Dado que hay 2 fuentes de frecuencias ω y frecuencia 0, aplicamos superposición.

i) Para frecuencia cero, el circuito equivalente en estado estacionario es:



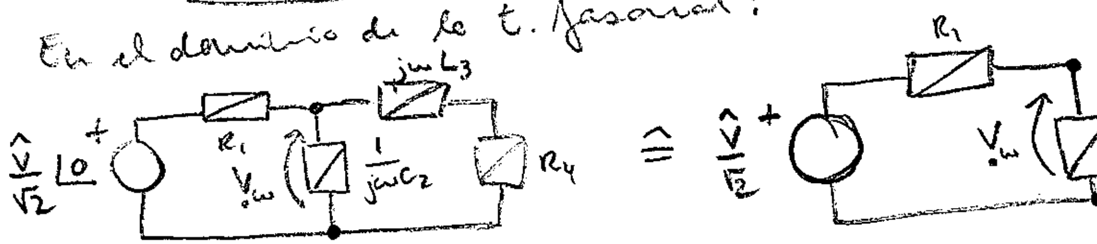
$$\Rightarrow v_0 = I_f (R_1 \| R_4) = \frac{I_f R_1 R_4}{R_1 + R_4}$$

ii) Para frecuencia ω, el circuito equivalente en estado estacionario es:



donde se debe calcular $v_\omega(t)$

En el dominio de la t. fasorial:



$$\underbrace{\frac{1}{j\omega C_2} \| (R_4 + j\omega L_3)}_{Z_{eq}}$$

$$\Rightarrow V_\omega = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R_1}$$

$$Z_{eq} = \frac{\frac{1}{j\omega C_2}(R_4 + j\omega L_3)}{\frac{1}{j\omega C_2} + (R_4 + j\omega L_3)} = \frac{R_4 + j\omega L_3}{1 + (R_4 + j\omega L_3)(j\omega C_2)}$$

$$\Rightarrow V_\omega = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \frac{R_4 + j\omega L_3}{R_4 + j\omega L_3 + R_1(1 - \omega^2 L_3 C_2 + j\omega R_4 C_2)}$$

$$= \frac{\hat{V}\sqrt{R_4^2 + (\omega L_3)^2}\ \angle \alpha - \beta}{\sqrt{2}\sqrt{(R_4 + R_1(1 - \omega^2 L_3 C_2))^2 + (\omega L_3 + \omega R_4 C_2)^2}}$$

$$\alpha = \operatorname{Arctg}(\omega L_3 / R_4)$$

$$\beta = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\omega L_3 + \omega R_4 C_2}{R_4 + R_1(1 - \omega^2 L_3 C_2)}\right)$$

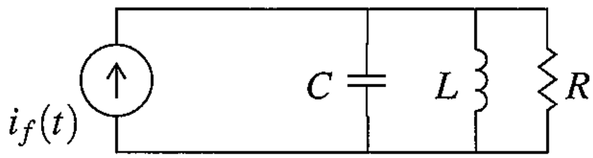
$\therefore v_{C_2,ee}(t)$

$$= v_0 + v_\omega(t)$$

$$= \frac{I_f R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{\hat{V}\sqrt{R_4^2 + (\omega L_3)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}}$$

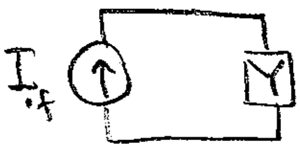
$$\times \cos(\omega t + \alpha - \beta)$$

Problema 1.4 (10 puntos) *En la red de la figura, la fuente de corriente es $i_f(t) = \hat{I}\sin(\omega t - \pi/4)$. Determine para qué rango de frecuencias ω el factor de potencia (FP) desde los terminales de la fuente de corriente es inductivo y para qué rango de frecuencias es capacitivo.*



Solución

Para determinar el F.P. desde los terminales de la fuente de corriente, calculamos la impedancia (o admitancia) equivalente:



$$Y_{eq} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

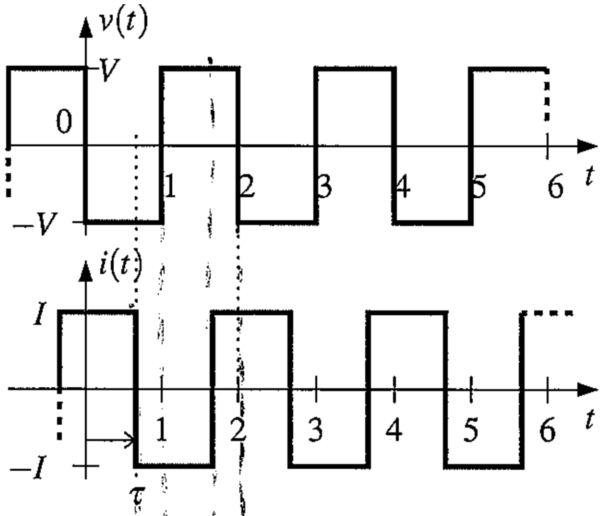
$$\measuredangle Y_{eq} = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{R}\right) = \begin{cases} >0 & \text{si } \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ =0 & \text{si } \omega = 1/\sqrt{LC} \\ <0 & \text{si } \omega < 1/\sqrt{LC} \end{cases}$$

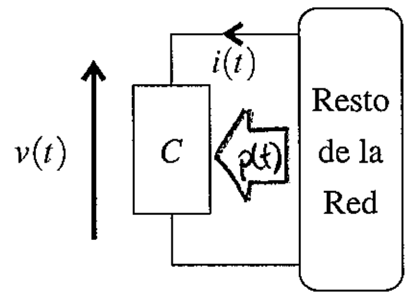
$$\Rightarrow \measuredangle Z_{eq} = -\measuredangle Y_{eq} = \begin{cases} >0 & \text{si } \omega < 1/\sqrt{LC} \\ =0 & \text{si } \omega = 1/\sqrt{LC} \\ <0 & \text{si } \omega > 1/\sqrt{LC} \end{cases}$$

$\measuredangle Z_{eq} = \measuredangle \varphi \Rightarrow$ F.P. $= \cos(\measuredangle \varphi)$ es inductivo si $\omega < 1/\sqrt{LC}$

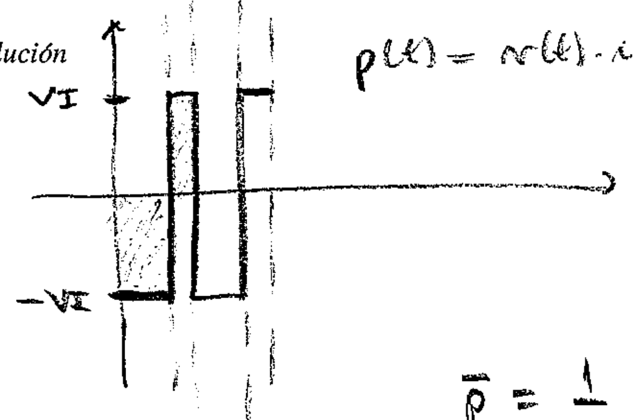
y es capacitivo si $\omega > 1/\sqrt{LC}$

Problema 15 (10 puntos) *En la figura se muestran las señales de corriente y voltaje en una componente desconocida C. Determine para qué valores de τ la componente C en promedio absorbe potencia.*





Solución



$p(t) = v(t)\cdot i(t) \rightarrow$ potencia absorbida por C

$p(t)$ tiene período 1 (doble de frecuencia que $v(t)$ e $i(t)$)

$$\bar{p} = \frac{1}{1}\int_0^1 p(t)\,dt$$

$$= \int_0^\tau (-VI)\,dt + \int_\tau^1 (VI)\,dt$$

$$= -VI\cdot\tau + VI(1-\tau) = VI(1-2\tau)$$

si $0 \le \tau \le \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{p} \ge 0$

$\frac{1}{2} < \tau < 1 \Rightarrow \bar{p} < 0$

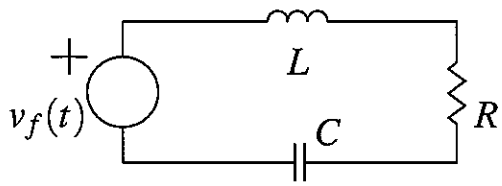
si $\tau < 0$, de manera similar, se obtiene que

si $-\frac{1}{2} \le \tau \le 0 \Rightarrow \bar{p} \ge 0$

si $-1 < \tau < -\frac{1}{2} \Rightarrow \bar{p} < 0$

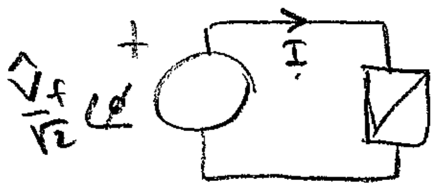
Por tanto, C absorbe potencia promedio si $-\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2}$

Problema 1.6 (10 puntos) *En la red de la figura, la fuente de voltaje es $v_f(t) = \hat{V}_f \cos(\omega t + \phi)$. Determine para qué frecuencia ω la potencia activa entregada por la fuente es máxima.*



Solución

Dominio de la t. fasorial:



$$R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = Z_{eq}$$

La potencia compleja entregada por la fuente es

$$P = V_f I^* = V_f \left(\frac{V_f}{Z_{eq}}\right)^* = \frac{|V_f|^2}{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$= \frac{|V_f|^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)$$

$$\Rightarrow P_{ac} = \frac{|V_f|^2 \, R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$ donde se observa que P_{ac} es máxima si $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

o bien, $$\frac{dP_{ac}}{d\omega} = \frac{-|V_f|^2 R}{\left(R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^2} \cdot 2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\frac{dP_{ac}}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

//