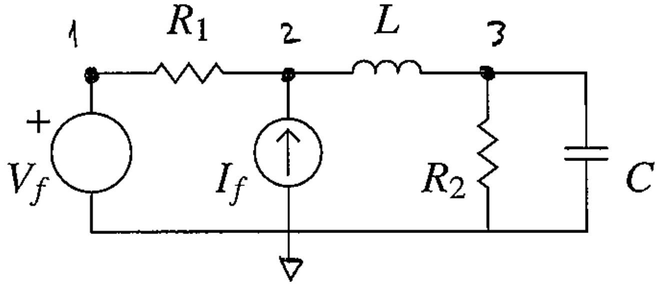
Nombre: Solución

ELO102 – S1 2015 – Control #11 – 8 de junio de 2015

Responda SOLO UNO de los dos problemas propuestos. Indique claramente cuál responde.

Problema 11.1 *En la red de la figura, determine la ecuación diferencial que satisface el voltaje por el condensador C.*



Aplicamos método de voltajes de nodos. Note que $v_{n1}(t) = V_f$

LCK en nodo 2: $\dfrac{v_{n2} - \overset{V_f}{\cancel{v_{n1}}}}{R_1} + \dfrac{1}{L}\int (v_{n2} - v_{n3})\,dt = I_f$

LCK en nodo 3: $\dfrac{1}{L}\int (v_{n3} - v_{n2})\,dt + \dfrac{v_{n3}}{R_2} + C\dfrac{dv_{n3}}{dt} = 0$

Es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, por tanto basta ahora con eliminar v_{n2}, por ejemplo, usando operadores

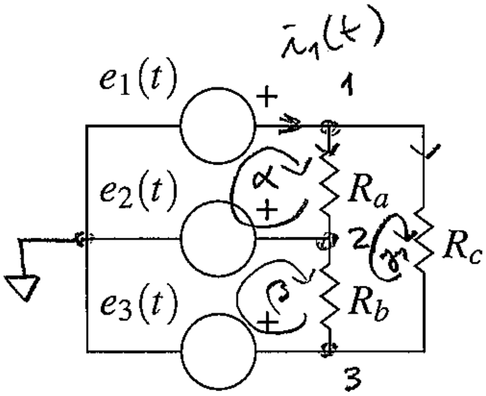
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L}D^{-1} & -\frac{1}{L}D^{-1} \\ -\frac{1}{L}D^{-1} & \frac{1}{L}D^{-1} + \frac{1}{R_2} + CD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n2} \\ v_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_f + \frac{V_f}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{n3} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L}D^{-1} & I_f + \frac{V_f}{R_1} \\ -\frac{1}{L}D^{-1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L}D^{-1} & -\frac{1}{L}D^{-1} \\ -\frac{1}{L}D^{-1} & \frac{1}{L}D^{-1} + \frac{1}{R_2} + CD \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{L}D^{-1}\left(I_f + \frac{V_f}{R_1}\right)}{\frac{1}{L}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)D^{-1} + \frac{1}{R_1R_2} + \frac{C}{L} + \frac{C}{R_1}D}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{C}{R_1}D^2 + \left(\frac{C}{L} + \frac{1}{R_1R_2}\right)D + \frac{1}{L}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] v_{n3} = \frac{1}{L}\left(I_f + \frac{V_f}{R_1}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{C}{R_1}\frac{d^2}{dt^2}v_{n3} + \left(\frac{C}{L} + \frac{1}{R_1R_2}\right)\frac{d}{dt}v_{n3} + \frac{1}{L}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v_{n3} = \frac{1}{L}\left(I_f + \frac{V_f}{R_1}\right)$$

Problema 11.2 *En el circuito de la figura determine la potencia instantánea entregada por la fuente $e_1(t)$.*



(i) Si se aplica voltaje de nodos, es conveniente como en la figura. De esta forma el voltaje en los otros 3 nodos es directo $v_{n1}(t) = e_1(t)$, $v_{n2}(t) = e_2(t)$, $v_{n3}(t) = e_3(t)$

Por tanto, la corriente entregada por $e_1(t)$ se puede obtener por LCK en nodo 1: $$i_1(t) = \frac{e_1(t) - e_2(t)}{R_a} + \frac{e_1(t) - e_3(t)}{R_c}$$

$$\Rightarrow p(t) = e_1(t)\, i_1(t) = e_1(t)\left[\frac{e_1(t) - e_2(t)}{R_a} + \frac{e_1(t) - e_3(t)}{R_c}\right]$$

(ii) Si se aplica método corrientes de malla eligiendo las mallas como en la figura:

$$-e_2(t) + e_1(t) = (i_\alpha - i_\gamma) R_a$$

$$-e_3(t) + e_2(t) = (i_\beta - i_\gamma) R_b$$

$$0 = (i_\gamma - i_\alpha) R_a + (i_\gamma - i_\beta) R_b + i_\gamma R_c$$

Sumando las 3 ecuaciones $\Rightarrow$ $i_\gamma = \dfrac{e_1 - e_3}{R_c}$

Reemplazando en α: $i_\alpha = \dfrac{e_1 - e_2}{R_a} + \dfrac{e_1 - e_3}{R_c}$ (igual que arriba)

$$\Rightarrow p(t) = i_\alpha e_1 = e_1\left[\frac{e_1 - e_2}{R_a} + \frac{e_1 - e_3}{R_c}\right]$$